Über das Verhalten des asynchronen Drehstrommotors bei unsymmetrischen Klemmenspannungen.

Von

GUSTAV HOMMEL

Diplom-Ingenieur.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs) genehmigte Dissertation.

Referent: *Professor Johann Ossanna.*

Korreferent: *Professor Leo Kadrnozka.*

München 1910.

K. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei Dr. C. Wolf & Sohn.

Über das Verhalten des asynchronen Drehstrommotors bei unsymmetrischen Klemmenspannungen.

Von

GUSTAV HOMMEL

Diplom-Ingenieur.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs) genehmigte Dissertation.

Referent: *Professor Johann Ossanna.*
Korreferent: *Professor Leo Kadrnozka.*

München 1910.

K. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei Dr. C. Wolf & Sohn.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 5

I. Abschnitt: Analytische Formulierung des unsymmetrischen Drehfeldes 7

II. Abschnitt: Vektorgleichungen des Drehstrommotors bei unsymmetrischen Klemmenspannungen 14

III. Abschnitt: Elektrische und mechanische Leistung, Drehmoment und Wirkungsgrad 27

IV. Abschnitt: Die Anwendung der Theorie des unsymmetrisch gespeisten Drehstrommotors auf den Spezialfall des Bahnbetriebes und Schlußfolgerung . . 33

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555412_0154

EINLEITUNG.

Die bisher bekannt gewordenen Theorien über das Verhalten der asynchronen Drehstrommotoren sind unter der Voraussetzung entwickelt, daß dem primären Stromkreise drei gleiche Spannungen zugeführt werden. Diese Annahme entspricht auch tatsächlich in den weitaus überwiegenden Fällen den Bedingungen, unter welchen diese Motoren praktische Verwendung finden.

Indessen können aber auch Fälle vorkommen, bei denen diese Voraussetzung nicht mehr zutrifft, d. h. wo durch besondere Betriebsverhältnisse die Symmetrie des elektrischen Ausgleichvorganges in den drei Phasen des Motors aufgehoben wird. Die Veranlassung zu derartigen Unsymmetrien ist beispielsweise dann gegeben, wenn sich zwischen Generator bezw. Transformator und Motor eine Linie befindet, deren einzelne Leitungen ungleiche Impedanzen besitzen (Drehstrombahnen) oder wenn ein Drehstrommotor an ein Netz angeschlossen ist, in welchem durch unsymmetrische Belastung der drei Phasen verschiedene Spannungsabfälle in den Zuleitungen auftreten.

Aus wirtschaftlichen Gründen sind allerdings im letzteren Falle diesen Spannungsverlusten so enge Grenzen gezogen, daß deren Unterschiede — und nur auf diese kommt es hier an — keine solchen Unsymmetrien hervorrufen können, um das Verhalten des Motors wesentlich zu beeinflußen. Beim Bahnbetriebe dagegen ist für die erwähnten Verlustgrößen der Spielraum nicht so eng bemessen, um von vornherein eine praktisch beachtenswerte Beeinflussung des Motors infolge unsymmetrischer Klemmenspannungen unwahrscheinlich zu machen.

In den Veröffentlichungen über die Erfahrungen bei Bahnen nach dem Drehstromsystem — wenigstens soweit sie dem Verfasser zugänglich waren — wird diese Frage zwar überhaupt nicht berührt, was den Anschein erwecken könnte, als ob ihr auch in diesem Falle keinerlei Bedeutung zukomme. Dennoch darf aber dieses Problem unbedingt ein theoretisches Interesse für sich in Anspruch nehmen, und insofern man sich auf den Standpunkt der Projektbearbeitung stellt, wird ihm auch ein gewisser praktischer Wert beizumessen sein. Denn es unterliegt keinem Zweifel, daß eine exakte Vorausberechnung der zu erwartenden Erscheinungen auf Grund zuverlässiger theoretischer Ergebnisse gegenüber etwaigen Sicherheitszuschlägen, wenn diese auch auf erfahrungsmäßiger Schätzung beruhen, den Vorzug verdient.

In der vorliegenden Arbeit hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, das Verhalten des asynchronen Drehstrommotors speziell unter den Bedingungen zu untersuchen, welche beim Bahnbetriebe durch die Stromzuführung geschaffen werden. Die Lösung dieser Frage nimmt ihren Ausgangspunkt bei den Eigenschaften des Drehfeldes, welches bei unsymmetrischen Phasenströmen entsteht und erfordert zunächst die Darstellung desselben in der für den vorliegenden Zweck geeignetsten Form. Diese Entwicklungen sind im I. Abschnitt gegeben.

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Bestimmung der E. M. Ke, welche dieses Feld in den Wicklungen des Motors bei Leerlauf und bei Belastung erzeugt und der Ableitung des Zusammenhanges zwischen Strom und Klemmenspannung pro Phase, d. i. der Impendanzgleichungen. Den Abschluß dieser Untersuchungen bildet die Aufstellung von Formeln, welche die Berechnung der charakteristischen Konstanten der Unsymmetrie (vergl. hierüber den I. Abschnitt) für beliebige Tourenzahlen des Motors ermöglichen und somit eigentlich die Lösung des Problems darstellen.

Die Betrachtungen über elektrische und mechanische Leistung, Drehmoment und Wirkungsgrad im III. Abschnitt sind noch beigefügt, weil diese Größen, welche für die Beurteilung des Motors wesentlich sind, sich in einer Form darstellen lassen, aus der ihr Zusammenhang mit der Unsymmetrie der Phasenströme in einfacher Weise deutlich hervorgeht.

Das IV. Kapitel bringt die Anwendung der Ergebnisse auf einen konkreten Fall, zu welchem die zahlenmäßigen Unterlagen, soweit sie den Motor betreffen, den auf der Valtellinabahn verkehrenden Drehstromlokomotiven (Typ. 1905) entnommen sind. Die Daten der Streckenausrüstung, welche in diesen Rechnungen vorkommen, entsprechen keiner bestimmten Anlage, sondern sind unter Berücksichtigung allgemein üblicher Ausführungsformen angenommen worden. Die Ermittlung der Widerstandskoëffizienten der Linie aus diesen Zahlen erforderte mit Rücksicht auf die Eigenart der vorliegenden Aufgabe eine spezielle Untersuchung, bei welcher der Verfasser von Herrn Prof. Kadrnozka durch die Übermittlung der grundlegenden Theorie, die hier zum Ausgangspunkt genommen ist, in dankenswerter Weise unterstützt wurde.

Hinsichtlich des allgemeinen Teiles der Arbeit wäre noch hervorzuheben, daß sich die Entwicklungen dieser Abschnitte unmittelbar an die Theorie der Asynchron-Maschinen anlehnen, wie sie von Prof. Ossanna gegeben wurde.*)

Herrn Prof. Ossanna ist der Verfasser auch für die Anregung zur Behandlung des in Rede stehenden Problems zu Dank verpflichtet, den er hiemit zum Ausdruck bringen möchte.

Die rechnerischen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind nicht durch entsprechende experimentelle Untersuchungen belegt. Wenn man jedoch in Betracht zieht, daß die nachstehenden Entwicklungen sich streng logisch auf der Grundlage einer, durch die Praxis durchaus bestätigten Theorie aufbauen, so besteht keine Veranlassung, die Zuverlässigkeit der gewonnenen Resultate in Zweifel zu ziehen.

Hiezu kommt noch, daß der bei symmetrischen Klemmenspannungen arbeitende Drehstrommotor naturgemäß einen Spezialfall des hier allgemein behandelten Problems darstellt, wodurch eine fortlaufende Kontrolle der Rechnung ermöglicht wird. Und in der Tat ergibt die Anwendung dieser Kontrolle auf die in der Folge abgeleiteten Gleichungen durchwegs die volle Übereinstimmung mit den Beziehungen, welche für den symmetrisch gespeisten Drehstrommotor Gültigkeit haben.

*) Veröffentlicht in „Starkstromtechnik", Taschenbuch für Elektrotechniker, Abschnitt Dynamomaschinen S. 558 ff.

I. Abschnitt.

Analytische Formulierung des unsymmetrischen Drehfeldes.

Die Grundlage zur Beurteilung der Vorgänge im unsymmetrisch gespeisten Drehstrommotor bildet die Erkenntnis der Eigenschaften des durch die Phasenströme erzeugten Feldes. Es ist daher als erste Aufgabe zu betrachten, den Zusammenhang zwischen diesen Strömen und dem resultierenden Feld aufzusuchen.

Zu diesem Behufe werden vorläufig die drei Phasenströme im Stator als gegeben vorausgesetzt; sie seien durch das Diagramm der Abbildung 1 dargestellt. Besitzt die Wicklung Sternschaltung, so ist wegen der Kontinuitätsbedingung die Summe der Momentanströme Null oder ins Diagramm übertragen: Ein beliebiger Strom-Vektor ist stets gleich und entgegengesetzt der Resultierenden aus den beiden anderen.

Demnach ist das Stromdiagramm der Abbildung 1 bereits durch zwei Ströme und ihre gegenseitige Phasenverschiebung eindeutig bestimmt. Es genügt daher zur vollständigen Charakterisierung der Unsymmetrie die Angabe der Größen J_I, J_{II} und γ, bezw. J_1, u und γ, wenn u das Verhältnis von J_{II} zu J_I bezeichnet. (Die römischen Zahlenindexe sollen dann angewendet werden, wenn es sich um eine Unterscheidung der drei Phasenströme handelt. Für gewöhnlich werden diese Stromstärken durch den in Phase I fließenden Strom ausgedrückt, welcher dann J_1 geschrieben wird.)

Diese Ströme besitzen folgende Gleichungen:

$$i_1 = \sqrt{2} \cdot J_I \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t = \sqrt{2} \cdot J_1 \cos \omega t$$

$$i_2 = \sqrt{2} \cdot J_{II} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \gamma\right) = \sqrt{2} \cdot u J_1 \cdot \cos (\omega t - \gamma)$$

$$i_3 = \sqrt{2} \cdot J_{III} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \delta\right) = \sqrt{2} \cdot J_1 (- \cos \omega t - u \cos (\omega t - \gamma))$$

Jeder dieser Ströme erzeugt ein Feld, dessen Amplitude in irgend einem Augenblick t dem Momentanwert des betreffenden Stromes proportional ist. Diese Amplituden der Phasenfelder können daher, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$y'_I = c \cdot \sqrt{2} \cdot J_1 \cdot \cos \omega t$$

$$y'_{II} = c \cdot \sqrt{2} \cdot J_1 \cdot u \cos (\omega t - \gamma)$$

$$y'_{III} = c \cdot \sqrt{2} \cdot J_1 (- \cos \omega t - u \cos (\omega t - \gamma))$$

$c \cdot \sqrt{2} \cdot J_1$ entspricht offenbar der Maximal-Amplitude des Feldes in Phase I. Diese soll mit Y_0 bezeichnet werden, so daß:

$$Y_0 = c \cdot \sqrt{2} \cdot J_1$$

Die räumliche Verteilung eines Phasenfeldes ist an sich nicht sinusförmig. Sie ist aber mit großer Annäherung durch die 1. Harmonische des wirklichen Feldes darstellbar. Diese Vereinfachung ergibt für den Momentanwert des Feldes einer Phase in Abhängigkeit von Zeit und Ort die Beziehungen:

$$y_I = \frac{4}{\pi} \cdot f_1 \cdot y'_I \cdot \sin \frac{2\pi}{X} \cdot x = \frac{4}{\pi} \cdot f_1 \cdot Y_0 \cdot \cos \omega t \cdot \sin \xi$$

$$y_{II} = \frac{4}{\pi} \cdot f_1 \cdot y'_{II} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{X} x - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{4}{\pi} \cdot f_1 \cdot Y_0 \cdot u \cos (\omega t - \gamma) \cdot \sin \left(\xi - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$y_{III} = \frac{4}{\pi} \cdot f_1 \cdot y'_{III} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{X} x - \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{4}{\pi} \cdot f_1 \cdot Y_0 \left(- \cos \omega t - u \cos (\omega t - \gamma) \right) \sin \left(\xi - \frac{4\pi}{3} \right)$$

X bedeutet hierin eine doppelte Polteilung; x die laufende Koordinate des Ortes; f_1 den Wicklungsfaktor. Dieser ist:

$$f_1 = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\vartheta_1}{\vartheta_{10}} \right)}{\vartheta_1 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\vartheta_{10}} \right)}$$

wobei ϑ_{10} die Nutenzahl pro Polteilung, ϑ_1 die Nutenzahl pro Pol und Phase darstellt. Wenn ferner zur Abkürzung von $\frac{2\pi}{X} \cdot x$ der Buchstabe ξ gesetzt wird, so stellt ξ eine Winkelabscisse, gemessen in elektrischen Graden, vor.

Der Wert des resultierenden Feldes: y zu irgend einer Zeit t, an einer beliebigen Stelle ξ ist gleich der Summe der Momentanwerte der Phasenfelder:

$$y = y_I + y_{II} + y_{III}$$

$$y = \frac{4}{\pi} \cdot f_1 \cdot Y_0 \left[\cos \omega t \left(\sin \xi - \sin \left(\xi - \frac{4\pi}{3} \right) \right) + u \cos (\omega t - \gamma) \left(\sin \left(\xi - \frac{2\pi}{3} \right) - \sin \left(\xi - \frac{4\pi}{3} \right) \right) \right]$$

Die Auswertung des Klammerausdrucks in dieser Gleichung führt zunächst auf die Form:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\sqrt{3} \sin \xi \cos \omega t - (1 + 2u \cos \gamma) \cos \xi \cos \omega t - 2u \sin \gamma \cos \xi \sin \omega t \right]$$

Hieraus läßt sich ferner ableiten:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + u \sin \gamma \right) \sin (\xi - \omega t) - \frac{1 + 2u \cos \gamma}{2} \cos (\xi - \omega t) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - u \sin \gamma \right) \sin (\xi + \omega t) \right.$$
$$\left. - \frac{1 + 2u \cos \gamma}{2} \cdot \cos (\xi + \omega t) \right] =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\sqrt{1 + u^2 + u \cos \gamma + \sqrt{3} \cdot u \sin \gamma} \cdot \sin (\xi - (\omega t + \psi)) \right.$$
$$\left. + \sqrt{1 + u^2 + u \cos \gamma - \sqrt{3}\, u \sin \gamma} \cdot \sin (\xi + (\omega t - \chi)) \right]$$

Hiebei gelten die Winkel ψ und χ als Abkürzungen für folgende Ausdrücke:

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + 2u \cos \gamma}{\sqrt{3} + 2u \sin \gamma} \qquad \text{und:} \qquad \chi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + 2u \cos \gamma}{\sqrt{3} - 2u \sin \gamma}$$

Wenn weiterhin die Amplituden der obigen Sinusfunktionen durch A_1 bezw. A_2 ersetzt werden, so folgt:

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{3}(1+2u\cos\gamma)}{4A_1}; \qquad \cos\psi = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2u\sin\gamma)}{4A_1}$$

$$\sin\chi = \frac{\sqrt{3}(1+2u\cos\gamma)}{4A_2}; \qquad \cos\chi = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2u\sin\gamma)}{4A_2}$$

Der Momentanwert des resultierenden Feldes: y kann nunmehr mit den vorstehenden Abkürzungen in der Form geschrieben werden:

(I) . . . $$y = \frac{4}{\pi}\cdot f_1 Y_0 [A_1\cdot\sin(\xi-(\omega t+\psi)) + A_2\cdot\sin(\xi+(\omega t-\chi))]$$

Dies ist die Gleichung zweier symmetrischer Drehfelder mit den konstanten Amplituden:

$$\frac{4}{\pi}\cdot f_1\cdot Y_0\cdot A_1 \quad \text{und} \quad \frac{4}{\pi}\cdot f_1\cdot Y_0\cdot A_2$$

Von diesen rotiert das erste im Sinne der Zählrichtung der Winkelabscisse ξ; das zweite in der entgegengesetzten Richtung. Beide Drehfelder, das synchrone oder Hauptfeld und das inverse — wie sie in der Folge bezeichnet werden — besitzen die gleiche und konstante Winkelgeschwindigkeit ω in elektrischen, bezw. $\frac{\omega}{p}$ in räumlichen Graden, wenn p die Zahl der Polpaare bedeutet. ($\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu_1$; wobei T der Periodendauer und ν_1 der Periodenzahl des zugeführten Wechselstromes entspricht.)

Die Faktoren A_1 und A_2, welche ausschließlich durch die, dem jeweiligen Stromdiagramm eigentümlichen Konstanten u und γ bestimmt werden, stellen in der Gleichung I das Verhältnis zwischen den Drehfeld-Amplituden und dem Maximalwert der 1. Harmonischen des vom Strome J_1 herrührenden Phasenfeldes Y_0 dar. Bei einem symmetrischen Drehfelde, wie es in der Primärwicklung eines Motors zustande kommt, hat dieses Verhältnis bekanntlich den konstanten Wert 1,5. Demzufolge kann das Phasenfeld Y_0 sowohl beim synchronen als auch beim inversen Drehfeld bezw. durch die Feldkomponenten Y'_0 und Y''_0 ersetzt werden, die ihrerseits wieder auf zwei Ströme $J\psi$ und $J\chi$ zurückzuführen sind. Für die Größen-Bestimmung dieser Feld- und Stromkomponenten gelten nach dem vorstehenden die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{4}{\pi}\cdot f_1\cdot Y_0\cdot A_1 = \frac{4}{\pi}\cdot f_1\cdot Y'_0\cdot 1{,}5; \quad \text{wobei: } Y'_0 = c\cdot\sqrt{2}\cdot J\psi$$

und:

$$\frac{4}{\pi}\cdot f_1\cdot Y_0\cdot A_2 = \frac{4}{\pi}\cdot f_1\cdot Y''_0\cdot 1{,}5; \quad \text{wobei: } Y''_0 = c\cdot\sqrt{2}\cdot J\chi$$

Da ferner nach früheren Festsetzungen:

$$Y_0 = c\sqrt{2}\cdot J_1,$$

so ergibt sich für die Komponentenströme $J\psi$, $J\chi$ und dem Strom J_1 der Zusammenhang:

$$J\psi = \frac{J_1 A_1}{1{,}5} \quad \text{und:} \quad J\chi = \frac{J_1\cdot A_2}{1{,}5}$$

Die Phasen der Ströme $J\psi$ und $J\chi$ gegenüber J_1 sind in Gleichung I bereits zum Ausdruck gebracht. Hienach eilt $J\psi$ dem J_1 um den Winkel ψ vor; $J\chi$ dagegen bleibt um den Winkel χ hinter J_1 zurück.

Mit diesen Suppositionen kann die Gleichung für das resultierende Feld y auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\text{(II)} \quad . \; . \quad y = \frac{6}{\pi} \cdot f_1 \cdot Y'_0 \sin(\xi - (\omega t + \psi)) + \frac{6}{\pi} \cdot f_1 \, Y''_0 \cdot \sin(\xi + (\omega t - \chi))$$

In der Abbildung 2 ist die Zerlegung des ursprünglichen Diagramms der drei Phasenströme in seine symmetrischen Komponenten vorgenommen, wie sie auf Grund der vorstehenden Ergebnisse zulässig ist. Diese Methode, wonach der unsymmetrische Ausgleichvorgang in allen Fällen durch zwei gegenläufige, symmetrische Stromsysteme einwandfrei ersetzt werden kann, erleichtert die Anknüpfung an die Theorie des symmetrisch gespeisten Motors für das vorliegende Problem ganz wesentlich und gestattet außerdem die Darstellung der ziemlich komplizierten Erscheinungen in einer Form, bei welcher die erforderliche Übersichtlichkeit stets gewahrt bleibt.

Aus den bisherigen Resultaten über die Natur des rotierenden Feldes bei unsymmetrischen Phasenströmen lassen sich zunächst einige allgemeine Schlußfolgerungen auf das Verhalten des Motors, der unter diesen Bedingungen arbeiten soll, ableiten. Vor allem interessiert der Zusammenhang der Amplituden der beiden gegenläufigen Drehfelder bezw. der Faktoren A_1 und A_2 abhängig von den charakteristischen Größen u und γ. Die Auswertung dieser Faktoren für eine Anzahl willkürlich gewählter Werte von u und γ würde indessen keine brauchbaren Anhaltspunkte für die Beurteilung des Einflusses dieser Größen auf die Motoreigenschaften zu liefern vermögen.

Unter der Voraussetzung nämlich, daß die unsymmetrischen Klemmenspannungen dadurch entstehen, daß dem Motor eine Linie mit verschiedenen Impedanzen in den drei Phasen vorgeschaltet ist, ergibt sich hinsichtlich der Größe der Phasenströme eine gewisse Grenze. Um diese Einschränkung zu berücksichtigen, darf für die Berechnung der beiden Drehfeld-Amplituden welche dem Strome J_I direkt proportional sind, dieser Strom nur für solche Werte von u und γ als konstant beibehalten werden, bei denen J_I größter Strom ist. Ergibt sich jedoch die Phasenverschiebung γ oder das Verhältnis u derart, daß J_{II} oder J_{III} größer als J_I werden, so muß letzteres und damit auch die Amplituden der Drehfelder zur Gewinnung einer Vergleichsgrundlage, soweit reduziert werden, daß der größte Strom in den drei Phasen einen festgesetzten Betrag, z. B. den bei Symmetrie, nicht überschreitet.

Diese einschränkende Forderung für die Begrenzung des Maximalstromes kann rechnerisch in folgender Weise erfüllt werden. Aus dem Stromdiagramm (Abb. 1) lassen sich für die Ströme die Größenbeziehungen ableiten:

$$J_I = J_1$$
$$J_{II} = u \cdot J_1$$
$$J_{III} = \sqrt{1 + u^2 + 2u \cos\gamma} \cdot J_I$$

Hinsichtlich der Wahl von u sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

$$u \geqq 1 \quad \text{und} \quad u \leqq 1$$

1. $u \geqq 1$.

In diesem Falle gilt dann für J_{II}: $J_{II} \geqq J_1$

J_{III} hat offenbar den größten Wert für $\gamma = 0$, denn es ist dann gleich der algebraischen Summe von J_I und J_{II}. Die Grenze für den Bereich, innerhalb dessen J_{III} größter Strom bleibt, wird durch die Beziehung festgelegt:

$$J_1 \cdot \sqrt{1 + u^2 + 2u \cos\gamma} = u \cdot J_1$$

woraus: $$\gamma' = \text{arc cos} - \frac{1}{2u}$$

In dem Intervalle von $\gamma = 0$ bis $\gamma = \gamma'$ besteht also für J_1 die Grenzbedingung

$$\sqrt{1 + u^2 + 2u \cos\gamma} \cdot J_1 = J'_1$$

oder: $$\underline{J_1 = \frac{J'_1}{\sqrt{1 + u^2 + 2u \cos\gamma}}}$$

wenn J'_1 den größten möglichen Strom in einer Phase bezeichnet.

Für Winkel, welche größer sind als γ' ist nicht mehr J_{III}, sondern J_{II} größter Strom und daher J_1 derart zu reduzieren, daß

$$u \cdot J_1 = J'_1$$

d. h.: $$J_1 = \frac{J'_1}{u}$$ wird.

2. $\underline{u \leq 1}$.

Unter dieser Bedingung ist J_{II} niemals größter Strom. Man hat also nur darauf zu achten, daß J_{III} den zulässigen Höchstwert nicht überschreitet.

Aus: $$J_1 \cdot \sqrt{1 + u^2 + 2u \cos\gamma} = J_1$$

folgt: $$\gamma'' = \text{arc cos} - \frac{u}{2}$$

Für größere Winkel als γ'' bleibt J_1 größter Strom und kann daher gleich dem maximal zulässigen J'_1 angenommen werden.

Unter Berücksichtigung dieser Reduktionsregeln ist in Abbildung 3 der Verlauf der Amplituden des synchronen und inversen Drehfeldes der Gleichung I für $u = 1$ abhängig von der Phasenverschiebung γ aufgezeichnet worden.

Streng richtig ist auch diese Darstellung des Zusammenhangs der beiden Drehfeld-Amplituden mit der Phasenverschiebung γ noch nicht. So müßte z. B. in Betracht gezogen werden, daß für den Fall $\gamma = \pi$ die Klemmenspannung gleich dem doppelten einer Phasenspannung wird. Legt man also in diesem Grenzfalle — wie dies in Abbildung 3 geschehen — der Berechnung denselben maximalen Strom J'_1 zu Grunde wie für den Symmetriefall, so hätte das zur Voraussetzung, daß beim einphasigen Betriebe eine Klemmenspannung zur Verfügung steht, welche sich zu derjenigen beim reinen Drehstrommotor verhält wie $2 : \sqrt{3}$; d. h. die um rund 15% höher ist als die symmetrische.

Andererseits ergibt sich für die Klemmenspannung im Grenzfalle $\gamma = 0$ ein Wert gleich dem 1,5 fachen der Phasenspannung, d. i. rund 13% weniger als die konstant angenommene verkettete Spannung beträgt.

Diese Korrekturen ändern indessen an den Ergebnissen, welche aus den Kurven der Abbildung 3 gefolgert werden, nichts, so daß ihre Vernachlässigung gerechtfertigt ist.

Bei den Kurven der Abbildung 3 fallen zunächst drei Werte besonders ins Auge, welche den Winkeln $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ und $\gamma = \pi$ entsprechen. In den Grenzlagen $\gamma = 0$ bezw. π verhält sich der Motor genau wie ein Einphasen-Induktionsmotor; denn in

beiden Fällen ist das inverse Feld beim Anlauf von gleicher Größe wie das synchrone. Der Fall $\gamma = \pi$ ist außerdem identisch mit $u = 0$ (womit auch $J_{II} = 0$ wird) und entspricht dem einphasig betriebenen Drehstrommotor.

Besonders deutlich geht aus der Abbildung die Tatsache hervor, daß der symmetrisch gespeiste Drehstrommotor die absolut günstigste Betriebsweise darstellt. Denn für $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ ist nicht nur das inverse Feld Null, sondern auch gleichzeitig das Hauptfeld ein Maximum. Daß ein reines Drehfeld bei den üblichen Wicklungen nur mit symmetrischen Phasenströmen erzeugt werden kann, geht aus der Bedingungsgleichung: $A_2 = 0$ hervor. Diese lautet:

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 + u^2 + u\cos\gamma - \sqrt{3}\, u \sin\gamma} = 0$$

Für u ergibt sich hieraus die Lösung:

$$u = -\frac{\cos\gamma - \sqrt{3}\sin\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{-(\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma)^2}{4}}$$

Die Wurzel in der vorstehenden Gleichung ist immer imaginär; eine reelle Lösung für u ist somit an die weitere Bedingung geknüpft:

$$\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma = 0;$$

woraus:

$$\gamma = \frac{2\pi}{3}$$

Durch Einsetzen dieses Winkels folgt für u der eindeutige Wert:

$$u = 1.$$

In dem Bereiche $\gamma = 0$ bis π, über welchen sich die Darstellung in Abbildung 3 erstreckt, sind alle möglichen Kombinationen, die zwischen den beiden Drehfeld-Amplituden für ein bestimmtes Verhältnis u vorkommen können, zum Ausdruck gebracht. Denn eine Erweiterung der Figur für $\gamma > \pi$ hat denselben Erfolg wie eine Vertauschung zweier Phasen. Dieser entspricht aber bekanntlich die Umkehr der Drehrichtung des Rotors. Als Haupt- oder synchrones Drehfeld, dessen Amplitude die Kurve I darstellt, wurde bisher stillschweigend dasjenige bezeichnet, welches die gleiche Rotationsrichtung besitzt wie der Läufer des Motors. Demnach entspräche im Intervall $\gamma = \pi$ bis $\gamma = 2\pi$ die Kurve II dem synchronen und Kurve I dem inversen Drehfeld. Den Schnittpunkten von I und II gehört keine bestimmte Drehrichtung des Motors zu, was mit den bekannten Eigenschaften des Einphasenmotors im Einklang steht. Die Ausmaße der Ordinaten in der Abbildung 3 ergeben sich aus der Annahme:

$$\frac{4}{\pi} \cdot f_1 \cdot Y_0 = 1$$

In der Abbildung 4 ist noch der Verlauf der Faktoren:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 + u^2 + u\cos\gamma + \sqrt{3}\, u \sin\gamma}$$

und

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 + u^2 + u\cos\gamma - \sqrt{3}\, u \sin\gamma}$$

welche die Verhältnisse der Drehfeld-Amplituden in Bezug auf den Maximalwert des Feldes in Phase I darstellen, aufgezeichnet. Bemerkenswert ist hiebei, daß A_1 seinen

größten Wert nicht bei symmetrischen Phasenströmen annimmt, sondern für $\gamma = 60^0$, und zwar besteht dieses relative Maximum unabhängig von den Werten, die das Verhältnis u annimmt.

Die bisherigen Erörterungen führen zu der allgemeinen Schlußfolgerung, daß alle denkbaren Stromverhältnisse, welche von der Symmetrie mehr oder weniger abweichen, eine Herabsetzung der Leistungsfähigkeit des Motors bedingen und eine Verschlechterung seiner Betriebseigenschaften überhaupt zur Folge haben müssen.

Zwischen dem Betrieb mit symmetrischen Klemmenspannungen und den Grenzwerten: $\gamma = 0$ und $\gamma = \pi$ stellt der Motor jeweils eine Kombination von einem Einphasen- und einem Drehstrommotor dar. Der wesentlichste Unterschied in den Betriebseigenschaften dieser Motorklassen besteht bekanntlich darin, daß ersterer kein Anzugsmoment zu entwickeln vermag. Dies könnte zu der Vermutung führen, daß sich der ungünstige Einfluß unsymmetrischer Klemmenspannungen auf das Verhalten des Drehstrommotors besonders beim Anlauf geltend machen werde.

Die späteren Entwicklungen zeigen jedoch, daß diese Schlußfolgerung nicht zutrifft. Die Empfindlichkeit des Drehstrommotors hinsichtlich ungleicher Klemmenspannungen ist gerade beim Anlauf am geringsten und erreicht in der Nähe des Synchronismus, also bei normalen Umdrehungszahlen ihr Maximum. Durch die Verwendung eines Anlaßwiderstandes — und das bildet bei den hier in Frage kommenden Motoren die Regel — kommt dieses Verhalten noch in verstärkter Weise zum Ausdruck. (Vergl. hiezu Abschnitt II am Schlusse und Abschnitt IV, S. 40.)

II. Abschnitt.

Vektorgleichungen des Drehstrommotors bei unsymmetrischen Klemmenspannungen.

Das Feld, dessen Gleichung im vorigen Abschnitt aufgestellt wurde, erzeugt in den Wicklungen des Stators und Rotors elektromotorische Kräfte, welche sich nach den allgemein gültigen Induktionsregeln bestimmen lassen.

Das synchrone oder Hauptfeld war gegeben durch den Ausdruck: (vergl. S. 10, Gleichung II)

$$\frac{6}{\pi} \cdot f_1 \cdot Y'_0 \cdot \sin(\xi - (\omega t + \psi));$$

wobei Y'_0 die Bedeutung hatte:

$$Y'_0 = c \cdot \sqrt{2} \cdot J\psi \quad \text{und} \quad J\psi = \frac{J_1 \cdot A_1}{1{,}5}$$

In der Folge wird die Amplitude dieses Drehfeldes mit H'_{12} bezeichnet. Wegen der in jedem Augenblick sinusartigen Verteilung des Feldes im Luftspalt wird dann der Effektivwert der Induktion:

$$\frac{H'_{12}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\pi\sqrt{2}} \cdot f_1 \cdot Y'_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dieses Feld rotiert, wie schon erwähnt, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi\,\nu_1}{p}$; seine absolute Geschwindigkeit im Raume ist daher:

$$\frac{2\pi \cdot \nu_1 \cdot R}{p} \text{ cm},$$

wenn R den Ankerhalbmesser in cm bedeutet.

Für die Beziehung zwischen dem magnetisierenden Strom $J\psi$ und der maximalen Induktion Y'_0, ergibt sich nach dem magnetischen Ausgleichgesetz folgendes:

$$Y'_0 = \frac{\frac{4\pi}{10} AW_{max}}{2\,\delta''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hiebei ist die Permeabilität $\mu = 1$ angenommen und δ'' für die radiale Dimension des Luftraumes geschrieben, welcher so reduziert gedacht ist, daß δ'' dem gesamten magnetischen Widerstand des Kraftlinienweges entspricht.

Die maximalen Amperewindungen (AW_m), die in der vorstehenden Gleichung vorkommen, ergeben sich zu:

$$AW_m = \frac{\sqrt{2} \cdot J\psi}{a_1} \cdot \vartheta_1 \cdot w_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wobei: a_1 die Zahl der parallelen Stromverzweigungen in der Statorwicklung
z_1 die Zahl der Nuten pro Pol und Phase
w_1 die Zahl der Drähte pro Nut
bezeichnet.

Die Vereinigung der Gleichungen 1 bis 3 liefert für die Drehfeld-Amplitude den Wert:

$$H'_{12} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{10} \cdot \frac{J\psi}{\delta''} \cdot w_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

w_1 ist hiebei als Abkürzung für $f_1 \cdot \frac{z_1 w_1}{a_1}$ gesetzt.

Diese Kraftlinien schneiden die Drähte der Primärwicklung mit der Geschwindigkeit:

$$v = \frac{2\pi R \cdot \nu_1}{p} \text{ cm}$$

Die wirksame Länge der induzierten Leiter ist L cm und gleich der Ankereisenbreite.

Nach der allgemeinen Induktionsgleichung:

$$E \text{ in Volt} = H \cdot v \cdot L \cdot 10^{-8} \times \text{Anzahl der Leiter}$$

— wobei in dieser „Leiterzahl" der Wicklungsfaktor berücksichtigt sein muß — ergibt sich jetzt der Effektivwert E'_{11} der, vom synchronen Feld in der Statorwicklung pro Phase erzeugten E. M. K. zu:

$$E'_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}\, J\psi}{\delta''} \cdot w_1 \cdot \frac{2\pi R \cdot \nu_1}{p} \cdot L \cdot 2p\, w_1 \cdot 10^{-8}$$

$$E'_{11} = J\psi \cdot \frac{48\pi}{10} \cdot \nu_1 \cdot \frac{RL}{\delta''} \cdot w_1^2 \cdot 10^{-8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung erscheint $J\psi$ mit lauter konstanten Größen multipliziert, die, soweit sie nicht bestimmte Zahlen sind, mit Ausnahme der Frequenz ν_1 den Daten des Motors entnommen werden können. E'_{11} ist somit dem Strom $J\psi$ direkt proportional und kann in abgekürzter Form geschrieben werden:

$$E'_{11} = k_{11} \cdot J\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Der Faktor k_{11} ist die primäre, nicht streuende Reaktanz pro Phase und nach den vorstehenden Ableitungen definiert durch:

$$k_{11} = \frac{48\pi}{10} \cdot \nu_1 \cdot \frac{RL}{\delta''} \cdot w_1^2 \cdot 10^{-8} \text{ *)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die Gleichung 6 gibt nur die Größenbeziehung zwischen E'_{11} und $J\psi$ an. Um auch die Richtung von E'_{11} gegenüber $J\psi$ zum Ausdruck zu bringen, ist zu beachten, daß bei Vernachlässigung der Wattkomponente des magnetisierenden Stromes, d. h. der Eisenverluste, E'_{11} dem Strome $J\psi$ um $\frac{\pi}{2}$ nacheilt. Dieser Phasenunterschied wird in der symbolischen Schreibweise dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man die rechte Seite der Gleichung 6 mit der komplexen Zahl:

$$\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{-1} = j$$

multipliziert; so daß:

$$\dot{E}'_{11} = j \cdot k_{11} \cdot \dot{J}\psi \text{ *)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

*) Vergl. Starkstromtechnik, S. 565, Gl. 2 und 1.

Zum Zeichen, daß eine Gleichung den Zusammenhang von Werten nach Größe und Richtung angibt (Vektorgleichung), werden die Buchstaben, welche diese Werte vertreten, mit Punkten versehen (s. Gleichung 8).

Die vom inversen Drehfelde:

$$\frac{6}{\pi} \cdot f_1 \cdot Y''_0 \cdot \sin(\xi + (\omega t - \chi)) = H''_{12} \cdot \sin(\xi + (\omega t - \chi))$$

in der Primärwicklung erzeugte E. M. K. E''_{11} ergibt sich in ganz der gleichen Weise, wie E'_{11} zu:

$$\dot{E}''_{11} = j \cdot k_{11} \cdot \dot{J}_\chi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Die totale E. M. K. E_{11}, welche das resultierende Feld in einer Phase der Primärwicklung erzeugt, ist:

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}'_{11} + \dot{E}''_{11} = j \cdot k_{11} (\dot{J}_\psi + \dot{J}_\chi) = j \cdot k_{11} \cdot \dot{J}_1 \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Unter den Feldstärken H'_{12} und H''_{12} waren nichtstreuende Kraftlinien zu verstehen, d. h. solche, die mit den Windungen der Primär- und Sekundärwicklung des Motors verkettet sind. Außer diesen kommen noch die, nur mit den felderzeugenden Amperewindungen verketteten Streulinien in Betracht. Diesen entspricht eine E. M. K. der Streuung $E_{1\sigma}$, für welche die Beziehung gilt:

$$\dot{E}_{1\sigma} = j \cdot k_{1\sigma} \cdot \dot{J}_1$$

Die Streureaktanz $k_{1\sigma}$ steht mit der Reaktanz k_{11} in dem Zusammenhang:

$$k_{1\sigma} = k_{11} \cdot \sigma_1$$

wenn σ_1 den primären Streuungskoëffizienten bedeutet.

Die Summierung der E. M. K. K. E_{11} und $E_{1\sigma}$, welche bei Vernachlässigung der Eisenverluste zulässig ist, ergibt für die Phase I:

$$\dot{E}_{11} + \dot{E}_{1\sigma} = \dot{E}_1^{I} = j \cdot k_{11}(1 + \sigma_1) \cdot \dot{J}_I = j \cdot k_1 \cdot \dot{J}_I \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

für die übrigen Phasen gilt analog:

$$\dot{E}_1^{II} = j \cdot k_1 \cdot \dot{J}_{II} \qquad \text{und} \qquad \dot{E}_1^{III} = j \cdot k_1 \cdot \dot{J}_{III} \quad \ldots \quad (12) \text{ u. } (13)$$

J_{II} eilt J_I um den Winkel γ nach und ist hinsichtlich seiner Größe gleich $u \cdot J_I$. Demnach besteht die Vektorgleichung:

$$\dot{J}_{II} = u \cdot \dot{J}_1 (\cos\gamma + j \sin\gamma) \qquad \text{vergl. S. 15 unten.}$$

Um auch J_{III} durch J_1 auszudrücken, kann die Beziehung:

$$\dot{J}_I + \dot{J}_{II} + \dot{J}_{III} = 0$$

benützt werden.

Die Gleichungen 11 mit 13 nehmen damit folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_1^{I} &= j \cdot k_1 \cdot \dot{J}_1 \\ \dot{E}_1^{II} &= j \cdot k_1 \cdot u \dot{J}_1 (\cos\gamma + j \sin\gamma) \\ \dot{E}_1^{III} &= j \cdot k_1 \cdot \dot{J}_1 (-1 - u(\cos\gamma + j \sin\gamma)) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

In dieser Form sind die Reaktanzspannungen E_1 sämtlich auf die Richtung von J_1 bezogen, welche künftighin als Normalrichtung beibehalten wird.

Im stillstehenden, offenen Rotor induzieren die beiden Drehfelder mit den Amplituden H'_{12} und H''_{12} ebenfalls E. M. Ke, welche durch die Gleichungen gegeben sind:

$$\dot{E}_{12} = j \cdot k_{12} \cdot \dot{J}_\psi \quad \ldots \quad (15)$$

und $$\dot{E}_{13} = j \cdot k_{13} \cdot \dot{J}_\chi \quad \ldots \quad (16)$$

wobei die Wechselreaktanzen:

$$k_{12} = k_{13} = \frac{48\pi}{10} \cdot \nu_1 \cdot \frac{RL}{\delta''} \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot 10^{-8} \quad *) \quad \ldots \quad (17)$$

nach denselben Regeln abzuleiten sind, welche für die Bestimmung von k_{11} (Gleichung 7) zur Anwendung kamen.

(w_2 ist ein Faktor, welcher dieselben Größen wie w_1 (s. S. 15) enthält, nur mit dem Unterschied, daß sie den Daten der Rotorwicklung entnommen werden müssen.)

Rotiert der Läufer mit einer Winkelgeschwindigkeit $\frac{\omega_2}{p}$ bezw. $\frac{2\pi\nu_2}{p}$ im Sinne der Drehrichtung des Hauptfeldes H'_{12}, so kommt für die Induktion in den Rotorleitern nur mehr die Relativgeschwindigkeit der Kraftlinienschnitte in Betracht. Diese beträgt für das synchrone Drehfeld:

$$v_1 = \frac{2\pi R (\nu_1 - \nu_2)}{p}$$

Demgemäß wird jetzt:

$$\dot{E}_{12} = j \cdot k_{12} \cdot \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} \cdot \dot{J}_\psi$$

(NB! k_{12} stellt die Wechselreaktanz für die Frequenz ν_1 dar)

oder kürzer: $$\dot{E}_{12} = j \cdot k_{12} \cdot s \cdot \dot{J}_\psi \quad **) \quad \ldots \quad (18)$$

wenn $$s = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1}$$

die prozentuale Schlüpfung bezeichnet.

Beim inversen Drehfelde H''_{12} erhöht sich durch die Rotation des Läufers die Relativgeschwindigkeit zwischen Kraftlinien und Leiter auf

$$v_2 = \frac{2\pi R (\nu_1 + \nu_2)}{p}$$

Dementsprechend ergibt sich damit:

$$\dot{E}_{13} = j \cdot k_{12} \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1} \cdot \dot{J}_\chi$$

und mit Einführung der Schlüpfung s:

$$\dot{E}_{13} = j \cdot k_{12} (2 - s) \cdot \dot{J}_\chi \quad \ldots \quad (19)$$

Die Gleichungen 18 und 19 gelten gleichmäßig für alle drei Phasen der Rotorwicklung. Bei ihrer späteren Verwendung für die Impedanzgleichungen des Motors, welche auf die Richtung von J_1 bezogen werden müssen, ist indessen die zeitliche

---

*) Vergl. Starkstromtechnik, S. 565, Gl. 3.

**) In Gleichung 18 wird eine Richtungsbeziehung zwischen zwei Vektoren aufgestellt, welche verschiedene Winkelgeschwindigkeiten besitzen. (E_{12} hat die Winkelgeschwindigkeit $2\pi(\nu_1 - \nu_2)$; $J\psi : 2\pi\nu_1$). Diese Schreibweise ist im vorliegenden Falle deswegen zulässig, weil hier $J\psi$ als ein Intensitätsfaktor des Feldes aufzufassen ist, welches die E. M. K. E_{12} induziert. Dieses Feld verhält sich aber gegenüber der Läuferwicklung infolge der Rotordrehung genau so, als ob es die Winkelgeschwindigkeit $2\pi(\nu_1 - \nu_2)$ hätte.

Reihenfolge der Spannungen E_{12}^{I}, E_{12}^{II} und E_{12}^{III} bezw. E_{13}^{I}, E_{13}^{II} und E_{13}^{III} besonders zu berücksichtigen.

Die E. M. K. K. E_{12} rühren von einem Drehfelde her, welches in der Zählrichtung der Phasenwicklungen über die Rotorleiter hinweggleitet. (s. Abb. 5.) Demzufolge ist E_{12}^{I} dem E_{12}^{II} um 120^0 und dem E_{12}^{III} um 240^0 voraus, was durch folgende Beziehungen ausgedrückt wird:

$$\dot{E}_{12}^{I} = \dot{E}_{12}$$

$$\dot{E}_{12}^{II} = \dot{E}_{12}(\cos 120^0 + j \sin 120^0) = \dot{E}_{12}(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\dot{E}_{12}^{III} = \dot{E}_{12}(\cos 240^0 + j \sin 240^0) = \dot{E}_{12}(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Das zweite Drehfeld, welches die Spannungen E_{13} erzeugt, hat die entgegengesetze Drehrichtung, woraus folgt:

$$\dot{E}_{13}^{I} = \dot{E}_{13}$$

$$\dot{E}_{13}^{II} = \dot{E}_{13}(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\dot{E}_{13}^{III} = \dot{E}_{13}(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Wird der Stromkreis des Läufers geschlossen, so entstehen in seinen Wicklungen zwei Ströme, J_2 und J_3, mit den Periodenzahlen: $\nu_1 - \nu_2$ und $\nu_1 + \nu_2$ und zwar in allen Phasen von gleicher Größe. Diese Sekundärströme bewirken somit wiederum zwei symmetrische Drehfelder, von denen das eine — durch J_2 erzeugt — mit der Winkelgeschwindigkeit:

$$+\frac{2\pi(\nu_1 - \nu_2)}{p}$$

und das andere — von J_3 herrührend — mit der Winkelgeschwindigkeit:

$$-\frac{2\pi(\nu_1 + \nu_2)}{p}$$

relativ zum Rotorumfang rotiert. Da nun der Rotor selbst, wie angenommen, die Winkelgeschwindigkeit:

$$+\frac{2\pi\nu_2}{p}$$

besitzt, so folgt, daß diese Drehfelder im Raume, d. h. gegenüber der feststehenden Statorwicklung die Winkelgeschwindigkeiten:

$$+\frac{2\pi(\nu_1 - \nu_2)}{p} + \frac{2\pi\nu_2}{p} = \frac{2\pi\nu_1}{p}$$

bezw.

$$-\frac{2\pi(\nu_1 + \nu_2)}{p} + \frac{2\pi\nu_2}{p} = -\frac{2\pi\nu_1}{p}$$

aufweisen. Die beiden sekundären Felder rotieren also mit den entsprechenden primären Drehfeldern synchron und zwar ganz unabhängig von der Tourenzahl des Motors.

Die E. M. K. E_{22}, welche das erste Rotordrehfeld in der sekundären Wicklung induziert, ist genau in derselben Weise zu berechnen, wie früher die E. M. K. E_{11} im Stator. Sie ist:

$$\dot{E}_{22} = j \cdot k_{22} \cdot \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} \cdot \dot{J}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

wobei:

$$k_{22} = \frac{48\pi}{10} \cdot \nu_1 \cdot \frac{R\,L}{\delta''} \cdot w_2^2 \cdot 10^{-8} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

die sekundäre, nicht streuende Selbstreaktanz pro Phase bei der Periodenzahl ν_1 darstellt. Mit Berücksichtigung der Streureaktanz:

$$k_{2\sigma} = k_{22} \cdot \sigma_2, \text{ folgt:}$$

$$\dot{E}_{22} + \dot{E}_{2\sigma} = \dot{E}_2 = j \cdot k_{22}(1 + \sigma_2) \cdot s \cdot \dot{J}_2 = j \cdot k_2 \cdot s \cdot \dot{J}_2 \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Das zweite Rotordrehfeld induziert in der Läuferwicklung eine E. M. K. E_{33}:

$$\dot{E}_{33} = j \cdot k_{33} \cdot \dot{J}_3 \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1}$$

hiebei ist:

$$k_{33} = k_{22} \text{ (vergl. Gleichung 21)}$$

mit Berücksichtigung der Streuung wird:

$$\dot{E}_3 = j \cdot k_2 (2 - s) \cdot \dot{J}_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

In der Statorwicklung erzeugen die sekundären Drehfelder E. M. Ke, die durch die Wechselreaktanz k_{21} bezw. k_{31} und die Ströme J_2 und J_3 bestimmt sind. Nämlich:

$$\dot{E}_{21} = j \cdot k_{21} \cdot \dot{J}_2 \text{*)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

$$\text{und:} \quad \dot{E}_{31} = j \cdot k_{31} \cdot \dot{J}_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

worin:

$$k_{21} = k_{31} = \frac{48\pi}{10} \cdot \nu_1 \cdot \frac{R\,L}{\delta''} \cdot w_2 \cdot w_1 \cdot 10^{-8} = k_{12} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

(Gemäß den Ausführungen auf S. 18 sind in den Gleichungen für E_{21} und E_{31} die Reaktanzen mit den Werten einzusetzen, die der Frequenz ν_1 entsprechen.)

Bezeichnet schließlich r_1 den Widerstand einer Phase der Primärwicklung und r_2 den Widerstand einer Phase der Rotorwicklung, so ergeben sich die Ohmschen Spannungsverluste in diesen Stromkreisen wie folgt:

$$\text{Im Stator: } \dot{E}_{1R}^{I} = -r_1 \cdot \dot{J}_I; \quad \dot{E}_{1R}^{II} = -r_1 \dot{J}_{II} \text{ und } \dot{E}_{1R}^{III} = -r_1 \dot{J}_{III} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

$$\text{im Rotor pro Phase: } \dot{E}_{2R} = -r_2 \dot{J}_2 \text{ und } \dot{E}_{3R} = -r_2 \cdot \dot{J}_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Nunmehr sind sämtliche E. M. K. K., welche im Stator und Rotor bei einer bestimmten Schlüpfung s auftreten, bekannt. Im Stator werden sie durch die aufgedrückten Phasenspannungen im Gleichgewicht gehalten, im (kurzgeschlossenen) Rotor ist ihre Summe gleich Null. Demnach können zunächst für den Primärstromkreis folgende Gleichungen aufgestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Delta}_1 + \dot{E}_{1R}^{I} + \dot{E}_1^{I} + \dot{E}_{21}^{I} + \dot{E}_{31}^{I} &= 0 \\ \dot{\Delta}_2 + \dot{E}_{1R}^{II} + \dot{E}_1^{II} + \dot{E}_{21}^{II} + \dot{E}_{31}^{II} &= 0 \\ \dot{\Delta}_3 + \dot{E}_{1R}^{III} + \dot{E}_1^{III} + \dot{E}_{21}^{III} + \dot{E}_{31}^{III} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

*) Vergl. die Anmerkung S. 17.

Nach den, in den Gleichungen 14, 24, 25 und 27 abgeleiteten Beziehungen für die einzelnen Spannungskomponenten, ergeben sich die Impedanzgleichungen pro Phase in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\Delta}_1 &= \dot{J}_1(r_1 - j\,k_1) - j\,k_{21}(\dot{J}_2 + \dot{J}_3) \\
\dot{\Delta}_2 &= \dot{J}_1(r_1 - j\,k_1)\cdot u(\cos\gamma + j\sin\gamma) - j\,k_{21}\left(\dot{J}_2\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dot{J}_3\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
\dot{\Delta}_3 &= \dot{J}_1(r_1 - j\,k_1)(-1 - u(\cos\gamma + j\sin\gamma)) - j\,k_{21}\left(\dot{J}_2\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dot{J}_3\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Bezüglich der Richtungssymbole, mit denen in der Gleichungsgruppe 30 die E.M.K.K. E_{21} und E_{31} in Phase II und III versehen sind, ist zu bemerken, daß für diese Spannungen dasselbe gilt, was auf S. 18 für E_{12} und E_{13} ausgeführt wurde.

Aus 30 folgt außerdem noch unmittelbar:

$$\dot{\Delta}_1 + \dot{\Delta}_2 + \dot{\Delta}_3 = 0 \quad (31)$$

d. h. die Phasenspannungen der Primärwicklung stellen sich unabhängig von den Klemmenspannungen des Motors immer so ein, daß ihre vektorielle Summe Null ist. Dies wird dadurch ermöglicht, daß das Potential des Sternpunkts der Statorwicklung einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Der in Gleichung 31 ausgesprochene Zusammenhang ist für die Diagrammkonstruktion wesentlich, weil damit aus dem Dreieck der Klemmenspannungen unmittelbar die Phasenspannungen bestimmt werden können. (Vergl. hierüber Abschn. IV.)

In den Impedanzgleichungen des Stators kommen noch die Rotorströme J_2 und J_3 vor. Zu ihrer Elimination sind die Impedanzgleichungen des Rotors heranzuziehen, welche wegen der Symmetrie in den Läuferstromkreisen nur für eine Phase aufgestellt werden müssen. Sie lauten:

$$-r_2\cdot\dot{J}_2 + j\cdot s\,k_2\cdot\dot{J}_2 + j\cdot s\,k_{12}\cdot\dot{J}_\psi = 0 \quad (32)$$

und:

$$-r_2\cdot\dot{J}_3 + j\,(2-s)\,k_2\,\dot{J}_3 + j\cdot(2-s)\,k_{12}\cdot\dot{J}_\chi = 0 \quad (33)$$

Aus 32 wird:

$$\dot{J}_2 = \frac{j\cdot s\,k_{12}\cdot\dot{J}_\psi}{r_2 - j\cdot s\,k_2}$$

und aus 33:

$$\dot{J}_3 = \frac{j\,(2-s)\,k_{12}\,\dot{J}_\chi}{r_2 - j\,(2-s)\,k_2}$$

Nach den Darlegungen auf S. 9 sind die Komponentenströme J_ψ und J_χ durch J_1 in folgender Weise auszudrücken (vergl. Abb. 2):

$$\dot{J}_\psi = \frac{A_1\cdot\dot{J}_1}{1{,}5}(\cos\psi - j\sin\psi)$$

und:

$$\dot{J}_\chi = \frac{A_2\cdot\dot{J}_1}{1{,}5}(\cos\chi + j\sin\chi)$$

Die Faktoren A, sowie die Winkelfunktionen ψ und χ hängen nur von den Konstanten u und γ ab, und zwar ist (vergl. S. 12)

$$A_1 \cdot \cos\psi = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} + 2u\sin\gamma)$$

$$A_1 \cdot \sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + 2u\cos\gamma)$$

$$A_2 \cdot \cos\chi = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - 2u\sin\gamma)$$

$$A_2 \cdot \sin\chi = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + 2u\cos\gamma)$$

Für J_2 und J_3 ergeben sich damit die Werte:

$$\dot{J}_2 = j \cdot \frac{s_1 k_{12}}{r_2 - j s_1 k_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} + 2u\sin\gamma - j(1 + 2u\cos\gamma)) \cdot \dot{J}_1$$

$$\dot{J}_3 = j \cdot \frac{s_2 k_{12}}{r_2 - j s_2 k_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} - 2u\sin\gamma + j(1 + 2u\cos\gamma)) \cdot \dot{J}_1$$

(s_2 ist hier kürzer statt $2 - s$; d. i. die Schlüpfung des Rotors gegenüber dem inversen Drehfeld, gesetzt.)

In den Gleichungen 30 treten überall die Produkte $-j k_{21} \cdot J_2$ bezw. $-j k_{21} \cdot J_3$ auf. Mit Benützung der vorstehenden Werte von J_2 und J_3 kann hiefür geschrieben werden:

$$-j \cdot k_{21} \cdot \dot{J}_2 = \dot{J}_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} [r'_m (\sqrt{3} + 2u\sin\gamma) + k'_m (1 + 2u\cos\gamma) - j\{r'_m (1 + 2u\cos\gamma) - k'_m (\sqrt{3} + 2u\sin\gamma)\}] \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(34)}$$

ferner:

$$-j \cdot k_{21} \cdot \dot{J}_3 = \dot{J}_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} [r''_m (\sqrt{3} - 2u\sin\gamma) - k''_m (1 + 2u\cos\gamma) + j\{r''_m (1 + 2u\cos\gamma) + k''_m (\sqrt{3} - 2u\sin\gamma)\}] \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(35)}$$

Hierin sind folgende Abkürzungen verwendet:

$$r'_m = \frac{r_2}{s_1} \cdot \frac{k_{12} \cdot k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_1}\right)^2 + k_2^2}; \qquad k'_m = k_2 \cdot \frac{k_{12} \cdot k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_1}\right)^2 + k_2^2}$$

$$r''_m = \frac{r_2}{s_2} \cdot \frac{k_{12} \cdot k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2 + k_2^2}; \qquad k''_m = k_2 \cdot \frac{k_{12} \cdot k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2 + k_2^2}$$

Durch Einführung der Werte aus den obigen Gleichungen 34 und 35 in diejenigen für die Phasenspannungen des Motors (Gleichungen 30) erhält man drei Impedanzgleichungen, in denen der Strom J_1, das Verhältnis u und die Phasenverschiebung γ als Funktionen der Schlüpfung s dargestellt sind.

Indessen sind die Phasenspannungen des Motors: Δ_1, Δ_2 und Δ_3 keineswegs als gegeben zu betrachten. Unter den Voraussetzungen, welche dem hier behandelten Problem zu Grunde liegen, müssen vielmehr die Impedanzgleichungen pro Phase bis zu dem Punkte ausgedehnt werden, an welchem die Spannung konstant gehalten wird, d. h. bis zum Anfang der Linie. Daher sind in die Gleichungen 30 noch die Linien-Impedanzen einzubeziehen.

Denkt man sich schließlich diese Gleichungen mit Berücksichtigung der Linienkoëffizienten r_I, r_{II} und r_{III}, sowie k_I, k_{II} und k_{III}, welche jeweils zu denjenigen des Stators r_1 und k_1 zu addieren sind, auf die Normalform gebracht, so ergeben sich für die Phasenspannungen, gemessen vom Anfang der Linie bis zum Sternpunkt der Statorwicklung, drei Gleichungen von folgender Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Delta}'_1 &= \dot{J}_1 (R_1 - j K_1) \\ \dot{\Delta}'_2 &= \dot{J}_1 (R_2 - j K_2) \\ \dot{\Delta}'_3 &= \dot{J}_1 (R_3 - j K_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Die Widerstände R und die Reaktanzen K sind hiebei durch die Beziehungen bestimmt:

$$R_1 = r_I + \frac{1}{2}(r_{m1} + r_{m2}) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(k_{m1} - k_{m2}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(r_{m1} - r_{m2})\, u \sin\gamma - \frac{1}{\sqrt{3}}(k_{m1} - k_{m2})\, u \cos\gamma$$

$$K_1 = k_I + \frac{1}{2}(k_{m1} + k_{m2}) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(r_{m1} - r_{m2}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(k_{m1} - k_{m2})\, u \sin\gamma + \frac{1}{\sqrt{3}}(r_{m1} - r_{m2})\, u \cos\gamma$$

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(k_{m1} - k_{m2}) + \left[k_{II} + \frac{1}{2}(k_{m1} + k_{m2}) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(r_{m1} - r_{m2})\right] u \sin\gamma + \left[r_{II} + \frac{1}{2}(r_{m1} + r_{m2}) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(k_{m1} - k_{m2})\right] u \cos\gamma$$

$$K_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(r_{m1} - r_{m2}) - \left[r_{II} + \frac{1}{2}(r_{m1} + r_{m2}) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(k_{m1} - k_{m2})\right] u \sin\gamma + \left[k_{II} + \frac{1}{2}(k_{m1} + k_{m2}) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(r_{m1} - r_{m2})\right] u \cos\gamma$$

$$R_3 = -r_{III} - \frac{1}{2}(r_{m1} + r_{m2}) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(k_{m1} - k_{m2}) - \left[k_{III} + \frac{1}{2}(k_{m1} + k_{m2}) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(r_{m1} - r_{m2})\right] u \sin\gamma + \left[k_{II} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(k_{m1} - k_{m2}) - \frac{1}{2}(r_{m1} + r_{m2})\right] u \cos\gamma$$

$$K_3 = -k_{III} - \frac{1}{2}(k_{m1} + k_{m2}) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(r_{m1} - r_{m2}) + \left[r_{III} + \frac{1}{2}(r_{m1} + r_{m2}) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(k_{m1} - k_{m2})\right] u \sin\gamma - \left[k_{III} + \frac{1}{2}(k_{m1} + k_{m2}) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(r_{m1} - r_{m2})\right] u \cos\gamma$$

Die Abkürzungen r_{m1}, r_{m2} und k_{m1}, k_{m2}, welche in diesen Formeln verwendet sind, haben dabei folgende Bedeutungen:

$$r_{m1} = r_1 + r'_m = r_1 + \frac{r_2}{s_1} \cdot \frac{k_{12}\, k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_1}\right)^2 + k_2^2} \qquad k_{m1} = k_1 - k'_m = k_1 - k_2 \frac{k_{12}\, k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_1}\right)^2 + k_2^2}$$

$$r_{m2} = r_1 + r''_m = r_1 + \frac{r_2}{s_2} \cdot \frac{k_{12}\, k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2 + k_2^2} \qquad k_{m2} = k_1 - k''_m = k_1 - k_2 \frac{k_{12} \cdot k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2 + k_2^2}$$

Ferner gelten noch die Beziehungen:

$$r'_m - r''_m = r_{m1} - r_{m2} \qquad \text{und:} \qquad k'_m - k''_m = -(k_{m1} - k_{m2});$$

von welchen in den Gleichungen für die Widerstandskoëffizienten R und K Gebrauch gemacht ist.

Die Ausdrücke für r_{m1} und r_{m2} sind identisch mit den Widerständen und die k_{m1} und k_{m2} sind gleich den Reaktanzen eines symmetrisch gespeisten Drehstrommotors bei den Schlüpfungen s_1 bezw. $s_2 = 2 - s_1$ (vergl. Starkstromtechnik S. 573 Gleichung 4).

Die Phasenspannungen Δ' in den Gleichungen 36 stehen nun mit den verketteten, symmetrischen Spannungen Δ am Anfang der Linie, die als gegeben und konstant anzunehmen sind, in dem Zusammenhang, daß:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Delta}'_1 - \dot{\Delta}'_2 &= \dot{\Delta} \\ \dot{\Delta}'_2 - \dot{\Delta}'_3 &= \dot{\Delta} \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \dot{\Delta}'_3 - \dot{\Delta}'_1 &= \dot{\Delta} \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

vergl. hiezu Abb. 6

Durch Vereinigung der Gleichungen 36 und 37 folgt:

$$\dot{\Delta} = \dot{J}_1 [R_1 - R_2 - j\{K_1 - K_2\}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

$$\dot{\Delta} = \dot{J}_1 \frac{1}{2} [R_3 - R_2 - \sqrt{3}(K_2 - K_3) - j\{\sqrt{3}(R_2 - R_3) - (K_2 - K_3)\}] \quad (39)$$

$$\dot{\Delta} = \dot{J}_1 \cdot \frac{1}{2} [R_1 - R_3 + \sqrt{3}(K_3 - K_1) - j\{(K_1 - K_3) - \sqrt{3}(R_3 - R_1)\}] \quad (40)$$

Gleichung 40 ist bereits durch die beiden Gleichungen 38 und 39 deswegen bestimmt, weil die vektorielle Summe der drei verketteten Spannungen Δ Null ist. Die Gleichungen 38 und 39 genügen aber zur Bestimmung der Unbekannten u und γ für eine angenommene Schlüpfung s_1, denn der Strom J_1 erscheint in diesen beiden Gleichungen jeweils als gemeinschaftlicher Faktor. Ist das Strömeverhältnis u und deren Phasendifferenz γ bekannt, so kann J_1 aus Gleichung 38 ermittelt werden, womit die Aufgabe rechnerisch gelöst ist.

Nach den Regeln, welche für das Rechnen mit komplexen Größen gelten, lassen sich aus 38 und 39 die Beziehungen ableiten:

$$R_2 + R_3 - 2R_1 - \sqrt{3}(K_2 - K_3) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

und:

$$2K_1 - (K_2 + K_3) - \sqrt{3}(R_2 - R_3) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Mit den Werten der Widerstandskoëffizienten R und K, welche auf S. 22 zusammengestellt sind, ergibt sich hieraus:

$$-2r_I - r_{III} - \sqrt{3}k_{III} - 3r_{m2} - \sqrt{3}k_{m2} + [\sqrt{3}(r_{II} + r_{III}) + k_{II} - k_{III} + 2\sqrt{3}r_{m2}] u \sin\gamma + [r_{II} - r_{III} - \sqrt{3}(k_{II} + k_{III}) - 2\sqrt{3}k_{m2}] u \cos\gamma = 0 \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

sowie:

$$2k_I + k_{III} - \sqrt{3}r_{III} - \sqrt{3}r_{m2} + 3k_{m2} + [r_{II} - r_{III} - \sqrt{3}(k_{II} + k_{III}) - 2\sqrt{3}k_{m2}] u \sin\gamma - [\sqrt{3}(r_{II} + r_{III}) + k_{II} - k_{III} + 2\sqrt{3}r_{m2}] u \cos\gamma = 0 \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

Zur Auflösung der Gleichungen 43 und 44 werden diese zunächst in der Form geschrieben:

$$C_1 + M \cdot u \sin\gamma + N \cdot u \cos\gamma = 0$$
$$C_2 + N \cdot u \sin\gamma - M\, u \cos\gamma = 0$$

Mit diesen Abkürzungen ergeben sich für u und γ die Werte:

$$u = \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{M^2 + N^2}}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{C_1 \cdot M + C_2 \cdot N}{C_1 N - C_2 \cdot M}$$

ferner ist noch:

$$\sin\gamma = -\frac{C_1 \cdot M + C_2 \cdot N}{\sqrt{(C_1^2 + C_2^2)(M^2 + N^2)}}$$

$$\cos\gamma = -\frac{C_1 \cdot N - C_2 \cdot M}{\sqrt{(C_1^2 + C_2^2)(M^2 + N^2)}}$$

Für gewöhnlich wird es sich bei γ um einen Winkel im zweiten Quadranten handeln, so daß die Gleichung für tg γ zu seiner eindeutigen Bestimmung ausreicht.

Solange die Größen u und γ als Funktionen der Schlüpfung für allgemeine Werte der Linienkoëffizienten dargestellt werden müssen, gestaltet sich die Gruppierung der letzteren in den diesbezüglichen Gleichungen ziemlich umständlich, was die Anwendung dieser Formeln scheinbar zu einer sehr mühsamen und zeitraubenden Rechenarbeit macht. Indessen ist aber nicht zu übersehen, daß durch die Einführung bestimmter Zahlenwerte der Aufbau dieser Gleichungen ganz wesentlich vereinfacht wird, wodurch die Schlußresultate mit wenigen elementaren Rechenoperationen erhalten werden. So gestaltet sich z. B. die Formel für u, wenn man die Hilfsgrößen a, m und n einführt, die bei der Berechnung eines bestimmten Falles jeweils durch eine einzige Zahl repräsentiert werden, folgendermaßen:

$$u = \sqrt{\frac{a_1 + m_1 r_{m_2} + m_2 k_{m_2} + 3(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}{a_2 + n_1 r_{m_2} + n_2 k_{m_2} + 3(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}} \qquad \text{(46)}$$

Für die hierin gebrauchten Abkürzungen, welche ausschließlich von den Linienkoëffizienten abhängen, gelten die Beziehungen:

$$a_1 = (r_I + r_{III})^2 + (k_I + k_{III})^2 - r_I(r_{III} - \sqrt{3}\, k_{III}) - k_I(\sqrt{3}\, r_{III} + k_{III})$$
$$m_1 = 3(r_I + r_{III}) - \sqrt{3}\,(k_I - k_{III})$$
$$m_2 = 3(k_I + k_{III}) + \sqrt{3}(r_I - r_{III})$$

ferner:

$$a_2 = (r_{II} + r_{III})^2 + (k_{II} + k_{III})^2 - r_{II}(r_{III} + \sqrt{3}\, k_{III}) + k_{II}(\sqrt{3}\, r_{III} - k_{III})$$
$$n_1 = 3(r_{II} + r_{III}) + \sqrt{3}\,(k_{II} - k_{III})$$
$$n_2 = 3(k_{II} + k_{III}) - \sqrt{3}\,(r_{II} - r_{III})$$

Die Gleichung für tg γ lautet in der abgekürzten Form:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{a_3 + p_1 r_{m_2} + p_2 \cdot k_{m_2} + 3\sqrt{3}\,(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}{a_4 + q_1 r_{m_2} + q_2 \cdot k_{m_2} + 3(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)} \qquad \text{(47)}$$

wobei: $a_3 = r_I (k_{II} - k_{III}) + r_{II} (k_{III} - k_I) + r_{III} (k_I - k_{II})$
$+ \sqrt{3} [r_I (r_{II} + r_{III}) + r_{II} r_{III} + k_I (k_{II} + k_{III}) + k_{II} k_{III}]$

$p_1 = 2\sqrt{3} (r_I + r_{II} + r_{III})$

$p_2 = 2\sqrt{3} (k_I + k_{II} + k_{III})$ und

$a_4 = \sqrt{3} [r_I (k_{II} + k_{III}) - r_{II} (k_I + k_{III}) + r_{III} (k_{II} - k_I)] + r_I (r_{III} - r_{II}) + r_{III} (r_{II} + 2 r_{III})$
$+ k_I (k_{III} - k_{II}) + k_{III} (k_{II} + 2 k_{III})$

$q_1 = 2\sqrt{3} (\sqrt{3}\, r_{III} + k_{II} - k_I)$

$q_2 = 2\sqrt{3} (\sqrt{3}\, k_{III} + r_I - r_{II})$

Die vollständige Lösung der Aufgabe verlangt nun noch die Bestimmung des Stromes J_1, für den nach Gleichung 38 die Beziehung gilt:

$$\dot{\Delta} = \dot{J}_1 (R_1 - R_2 - j \{K_1 - K_2\})$$

Nach Einführung der Werte für die Koëffizienten R und K (cf. S. 22) folgt:

$$\dot{\Delta} = \dot{J}_1 \left[r_I - r_{II}\, u \cos\gamma - k_{II}\, u \sin\gamma + \frac{1}{2}(1 - u\cos\gamma)(r_{m1} + r_{m2}) - \frac{1}{2} u \sin\gamma\, (k_{m1} + k_{m2})\right.$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} u \sin\gamma\, (r_{m1} - r_{m2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + u\cos\gamma)(k_{m1} - k_{m2})$$
$$- j \{k_I - k_{II}\, u \cos\gamma + r_{II}\, u \sin\gamma + \frac{1}{2}(1 - u\cos\gamma)(k_{m1} + k_{m2}) + \frac{1}{2} u \sin\gamma\, (r_{m1} + r_{m2})$$
$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2} u \sin\gamma (k_{m1} - k_{m2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + u\cos\gamma)(r_{m1} - r_{m2})\}\right] \quad . \; . \; \textbf{(48)}$$

Beim Anlauf ist: $s_1 = s_2 = 1$;

und daher: $r_{m1} = r_{m2} = r_{ma}$, sowie $k_{m1} = k_{m2} = k_{ma}$

Zur Berechnung des Anlaufstromes J_a^I ergibt sich somit die Gleichung:

$$\dot{\Delta} = \dot{J}_a^I [r_I + r_{ma} - u\cos\gamma\,(r_{II} + r_{ma}) - u\sin\gamma\,(k_{II} + k_{ma})$$
$$- j \{k_I + k_{ma} - u\cos\gamma\,(k_{II} + k_{ma}) + u\sin\gamma\,(r_{II} + r_{ma})\}] \quad . \; . \; . \; \textbf{(49)}$$

Diese Gleichung kann auch in der einfacheren Form geschrieben werden:

$$\dot{\Delta} = \dot{J}_a^I (r_I + r_{ma} - j \{k_I + k_{ma}\}) - \dot{J}_a^{II} (r_{II} + r_{ma} - j \{k_{II} + k_{ma}\}) \quad . \; . \; . \; \textbf{(50)}$$

worin J_a^{II} den Anlaufstrom in Phase II bezeichnet. Nach der bisher gewählten Rechnungsmethode ist aber für die Auswertung nur Gleichung 49 brauchbar.

Es fragt sich nun, welchen Änderungen die Größen u und γ mit variabler Schlüpfung unterworfen sind. Die einzigen Glieder, welche in den Gleichungen 46 und 47 die Schlüpfung enthalten, sind r_{m2} und k_{m2} und zwar ist:

$$r_{m2} = r_1 + \frac{r_2}{s_2} \cdot \frac{k_{12}\, k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2 + k_2^2} \qquad k_{m2} = k_1 - k_2 \frac{k_{12}\, k_{21}}{\left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2 + k_2^2}$$

Die Schlüpfung s_2 steht mit $s_1 = s$ in dem Zusammenhang, daß:

$$s_2 = 2 - s.$$

Solange eine Asynchron-Maschine als Motor arbeitet, kommen nur Schlüpfungen zwischen $s = 0$ und $s = 1$ in Betracht; demnach bewegt sich bei einem Drehstrommotor s_2 in den äußersten Grenzen: $s_2 = 2$ und $s_2 = 1$; es behält also für alle Fälle die Größenordnung der Einheit bei. Nun steht bei Motoren mit Leistungen, wie sie im Bahnbetriebe erforderlich sind, der sekundäre Widerstand r_2 zur Läuferreaktanz k_2 in dem Verhältnis von etwa 1 : 100. Dieses Verhältnis wird durch das Hinzutreten von s_2 (s. die obigen Gleichungen für r_{m_2} und k_{m_2}) entweder noch verkleinert ($s_2 = 2$), mindestens aber in dieser Größenordnung erhalten. Infolgedessen ist das Quadrat von $\frac{r_2}{s_2}$ gegenüber demjenigen von k_2 bei allen Schlüpfungen des Motors vernachlässigbar. Die Motorkonstanten r_{m_2} und k_{m_2} können also auch geschrieben werden:

$$r_{m_2} = r_1 + \frac{r_2}{s_2} \cdot \frac{k_{12}\, k_{21}}{k_2^2} \qquad\qquad k_{m_2} = k_1 - \frac{k_{12}\, k_{21}}{k_2}$$

k_{m_2} ist somit praktisch von der Tourenzahl des Motors überhaupt unabhängig. Bezüglich r_{m_2} ist zu unterscheiden zwischen Schlüpfungen in der Nähe des Synchronismus und Anlauf.

Der größte Wert der Schlüpfung ist mit $s = 0{,}05$ für den im Betrieb befindlichen Motor sicher schon zu hoch angenommen. Demzufolge variiert s_2 keinesfalls um mehr als zwischen 2,00 und 1,95. Daraus geht hervor, daß innerhalb der normalen Schlüpfungen des Motors r_{m_2} praktisch unveränderlich ist und daher für diesen Bereich auch die charakteristischen Konstanten der Unsymmetrie ihre Werte beibehalten.

Eine merkliche Änderung von r_{m_2} und zwar im Sinne der Vergrößerung ergibt sich beim Anlassen; d. i. für $s_2 = 1$. Es müssen daher u und γ für diese Verhältnisse beim Anlauf besonders bestimmt werden. Eine getrennte Berechnung für diesen Fall ist indessen meistens schon darum nötig, weil das Anlassen in der Regel mit Widerstand im Rotor erfolgt, womit eine sehr große Änderung der Motorkoëffizienten r_{m_2} und k_{m_2} verbunden ist.

Aus dem Aufbau der beiden Gleichungen 46 und 47 ist zu folgern, daß Unterschiede in den Linien-Impedanzen auf das Ergebnis um so geringeren Einfluß haben, je größer r_{m_2} und k_{m_2} sind. Da nun r_{m_2} in der Nähe des synchronen Ganges kleiner ist als beim Anlauf — bei Verwendung eines Anlaßwiderstandes sogar sehr viel kleiner — so läßt sich hieraus der Schluß ziehen, daß der Drehstrommotor im normalen Betriebe gegen unsymmetrische Spannungsänderungen bezw. -Verluste, empfindlicher ist als beim Anlauf.

III. Abschnitt.

Elektrische und mechanische Leistung, Drehmoment und Wirkungsgrad.

Von den elektrischen Leistungen, welche im belasteten Motor zur Umsetzung gelangen, bezeichnet in der Folge W_1 den gesamten, primär aufgenommenen Effekt, welcher dem Stator zugeführt werden muß. Dieser setzt sich zusammen aus den Leistungen in den einzelnen Phasen, so daß:

$$W_1 = W_I + W_{II} + W_{III}$$

Zur Bestimmung dieser Phasenleistungen sind die Impedanzgleichungen 30 im II. Abschnitt heranzuziehen, die dort auf S. 20 entwickelt wurden. In abgekürzter Schreibweise lauten dieselben:

$$\dot{\Delta}_1 = \dot{J}_1 (R'_1 - j K'_1) \quad \ldots \quad \textbf{(1a)}$$

$$\dot{\Delta}_2 = \dot{J}_1 (R'_2 - j K'_2) \quad \ldots \quad \textbf{(1b)}$$

$$\dot{\Delta}_3 = \dot{J}_1 (R'_3 - j K'_2) \quad \ldots \quad \textbf{(1c)}$$

Die hierin mit R' und K' bezeichneten Widerstände und Reaktanzen ergeben sich aus den auf S. 22 ermittelten R und K ohne weiteres, wenn die dort vertretenen Linienkoëffizienten r_I, k_I etc. gleich Null gesetzt werden. Daraus folgt:

$$R_1' = r_{m1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right) + r_{m2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right) - (k_{m1} - k_{m2})\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} u \cos\gamma\right)$$

$$K_1' = k_{m1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right) + k_{m2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right) + (r_{m1} - r_{m2})\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} u \cos\gamma\right)$$

$$R_2' = r_{m1}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} u \sin\gamma + \frac{1}{2} u \cos\gamma\right) + r_{m2}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} u \sin\gamma + \frac{1}{2} u \cos\gamma\right)$$
$$+ k_{m1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} u \sin\gamma + \frac{1}{2\sqrt{3}} u \cos\gamma\right) - k_{m2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} u \sin\gamma + \frac{1}{2\sqrt{3}} u \cos\gamma\right)$$

$$K_2' = k_{m1}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} u \sin\gamma + \frac{1}{2} u \cos\gamma\right) + k_{m2}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} u \sin\gamma + \frac{1}{2} u \cos\gamma\right)$$
$$- r_{m1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} u \sin\gamma + \frac{1}{2\sqrt{3}} u \cos\gamma\right) + r_{m2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} u \sin\gamma + \frac{1}{2\sqrt{3}} u \cos\gamma\right)$$

$$R_3' = r_{m1}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}u\sin\gamma-\frac{1}{2}u\cos\gamma\right)+r_{m2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}u\sin\gamma-\frac{1}{2}u\cos\gamma\right)$$
$$-k_{m1}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}u\sin\gamma-\frac{1}{2\sqrt{3}}u\cos\gamma\right)+k_{m2}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}u\cos\gamma-\frac{1}{2\sqrt{3}}u\cos\gamma\right)$$

$$K_3' = k_{m1}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}u\sin\gamma-\frac{1}{2}u\cos\gamma\right)+k_{m2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}u\sin\gamma-\frac{1}{2}u\cos\gamma\right)$$
$$+r_{m1}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}u\sin\gamma-\frac{1}{2\sqrt{3}}u\cos\gamma\right)-r_{m2}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}u\sin\gamma-\frac{1}{2\sqrt{3}}u\cos\gamma\right)$$

In den Gleichungen 1 sind diese Widerstandsgrößen so ausgedrückt, daß die Phasenspannungen Δ_1, Δ_2 und Δ_3 sämtlich auf die Richtung von J_I bezogen erscheinen. Der Übergang zu den Beziehungen für die elektrische Leistung erfordert zunächst die Umformung der Gleichungen 1b und 1c, derart, daß in denselben die Richtung von Δ_2 und Δ_3 relativ zu J_{II} bezw. J_{III} zur Darstellung kommt. Da nun die einzelnen Phasenströme unter sich in dem Zusammenhang stehen:

$$\dot{J}_I = \dot{J}_1$$
$$\dot{J}_{II} = u\cdot\dot{J}_1(\cos\gamma+j\sin\gamma)$$
$$\dot{J}_{III} = \dot{J}_1(-1-u(\cos\gamma+j\sin\gamma))$$

so ist zur Herstellung dieses Übergangs in Gleichung 1b der Ausdruck:

$$u(\cos\gamma+j\sin\gamma)$$

und in Gleichung 1c der Klammerwert:

$$(-1-u(\cos\gamma+j\sin\gamma))$$

als gemeinschaftlicher Faktor herauszunehmen. Die Gleichung 1a bleibt unverändert, da sie die verlangte Beziehung zwischen Phasenspannung und -Strom bereits angibt. Mit dieser Umformung können dann die Phasen-Impedanzgleichungen wie folgt dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\Delta}_1 &= \dot{J}_I\ [(r_{m1}-jk_{m1})\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}u\sin\gamma-j\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}u\cos\gamma\right\}\right)+\\
&\quad+(r_{m2}-jk_{m2})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}u\sin\gamma+j\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}u\cos\gamma\right\}\right)]\\
\dot{\Delta}_2 &= \dot{J}_{II}\ [(r_{m1}-jk_{m1})\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{u\sqrt{3}}\sin\gamma+j\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{u\sqrt{3}}\cos\gamma\right\}\right)+\\
&\quad+(r_{m2}-jk_{m2})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u\sqrt{3}}\sin\gamma-j\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{u\sqrt{3}}\cos\gamma\right\}\right)]\\
\dot{\Delta}_3 &= \dot{J}_{III}\ [(r_{m1}-jk_{m1})\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha^2\sqrt{3}}u\sin\gamma-j\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1+u\cos\gamma}{\alpha^2\sqrt{3}}\right\}\right)+\\
&\quad+(r_{m2}-jk_{m2})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha^2\sqrt{3}}u\sin\gamma+j\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1+u\cos\gamma}{\alpha^2\sqrt{3}}\right\}\right)]
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(2)$$

In der letzten Gleichung stellt α eine Abkürzung für den Ausdruck:

$$\sqrt{1 + u^2 + 2u \cos \gamma}$$

vor, der dem Größenverhältnis zwischen J_{III} und J_I entspricht.

Aus den Gleichungen 2 lassen sich jetzt die Wattleistungen pro Phase nach der allgemeinen Beziehung: $W = J^2 \cdot r$
ableiten, indem man die Kosinuskomponenten der Phasenspannungen mit den zugehörigen Phasenströmen multipliziert. Gleichzeitig ist hiebei die Elimination der Ströme J_{II} und J_{III} möglich, denn diese stehen mit J_I in dem Zusammenhang:

$$J_{II}^2 = u^2 \cdot J_1^2 \quad \text{nnd:} \quad J_{III}^2 = \alpha^2 J_1^2$$

Somit ergeben sich jetzt die Leistungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
W_I &= J_1^2 \left[r_{m1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right) + r_{m2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right)\right. \\
&\qquad \left. - (k_{m1} - k_{m2})\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} u \cos\gamma\right)\right] \\
W_{II} &= J_1^2 \left[r_{m1}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right) + r_{m2}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right)\right. \\
&\qquad \left. + (k_{m1} - k_{m2})\left(\frac{u^2}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} u \cos\gamma\right)\right] \\
W_{III} &= J_1^2 \left[r_{m1}\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right) + r_{m2}\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} u \sin\gamma\right)\right. \\
&\qquad \left. - (k_{m1} - k_{m2})\left(\frac{\alpha^2}{2\sqrt{3}} - \frac{1 + u\cos\gamma}{\sqrt{3}}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Bei der Summierung dieser Gleichungen 3 zur Darstellung der Gesamtleistung W_1 verschwinden die Klammerfaktoren für die Motorreaktanzen k_{m1} und k_{m2} und es wird:

$$W_1 = W_I + W_{II} + W_{III}$$

$$W_1 = J_1^2 \left[r_{m1}(1 + u^2 + u\cos\gamma + \sqrt{3}\, u \sin\gamma) + r_{m2}(1 + u^2 + u\cos\gamma - \sqrt{3}\, u \sin\gamma)\right]$$

wofür mit den bekannten Abkürzungen A_1 u. A_2 (s. S. 12) auch geschrieben werden kann:

$$W_1 = J_1^2 \cdot \frac{4}{3}\left[r_{m1} \cdot A_1^2 + r_{m2} A_2^2\right] \quad \ldots \quad (4)$$

Von dieser gesamten primär aufgenommenen Leistung wird ein Teilbetrag, entsprechend dem Widerstand der Statorwicklung r_1 in Wärme übergeführt. Diese Stromwärmeverluste V_1 können durch die Gleichung dargestellt werden:

$$V_1 = J_1^2 \cdot \frac{4}{3} r_1 (A_1^2 + A_2^2)$$

denn nach früheren Festsetzungen enthält sowohl r_{m1} als auch r_{m2} den Widerstand r_1 als Summanden. (S. 22).

Die Differenz $W_1 - V_1$ ist demzufolge gleich der auf den Rotor übertragenen Leistung W_2 und mit den bisherigen Bezeichnungen auszudrücken durch:

$$W_2 = W_1 - V_1 = J_1^2 \cdot \frac{4}{3}\left[r'_m A_1^2 + r''_m A_2^2\right] \quad \ldots \quad (5)$$

Dieser, auf den Läufer übertragene Effekt W_2 zerfällt in zwei Teile, nämlich in die sekundäre elektrische Leistung W_{2e}, welche bei kurzgeschlossenem Rotor mit den Kupferverlusten identisch ist, und in die mechanische Leistung W_m. Die letztere steht mit W_2 in dem einfachen Zusammenhang *):

$$W_m = W_2 (1 - s) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

der für alle denkbaren Schlüpfungen s Gültigkeit besitzt.

Da nun beim unsymmetrisch gespeisten Drehstrommotor gleichzeitig zwei verschiedene Schlüpfungen auftreten, nämlich s_1 gegenüber dem synchronen oder Hauptfeld, und s_2 d. i. die Schlüpfung in Bezug auf das inverse Drehfeld, so ist die Gleichung 6 jeweils gesondert auf diejenigen Teilbeträge: W'_2 und W''_2 der Leistung W_2 anzuwenden, welche auf Grund der zugehörigen Relativgeschwindigkeiten zwischen dem Rotor und den Stator-Drehfeldern auf ersteren übertragen werden. Aus dem Gang der bisherigen Entwicklungen läßt sich ohne weiteres entnehmen, daß die, der Schlüpfung s_1 entsprechende sekundäre Leistung W_2' durch die Beziehung:

$$W'_2 = J_1^2 \cdot \frac{4}{3} r'_m A_1^2$$

und die Leistung W''_2 durch: $W''_2 = J_1^2 \cdot \frac{4}{3} r''_m A_2^2$ gegeben ist.

Da diese Leistungstransformationen sich zwar in einem gemeinschaftlichen Stromkreise aber in gegenseitiger Unabhängigkeit voneinander vollziehen, so ist es nach den Gesetzen der Superposition erlaubt, die Einzelvorgänge für sich zu untersuchen und erst deren Ergebnisse zu summieren. Demgemäß ergeben sich die entsprechenden mechanischen Leistungen (s. Gleichung 6) zu:

$$W'_m = W'_2 (1 - s_1) = J_1^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot A_1^2 \cdot r'_m \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

und

$$W''_m = W''_2 (1 - s_2) = - J_1^2 \cdot \frac{4}{3} A_2^2 \cdot r''_m \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

Die gesamte mechanische Leistung:

$$W_m = W'_m + W''_m,$$

welche an der Motorwelle zur Wirkung kommt, ist sonach:

$$W_m = J_1^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1} [r'_m A_1^2 - r''_m A_2^2] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Das Drehmoment D ergibt sich aus der mechanischen Leistung W_m durch Division mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi\nu_2}{p}$ des Rotors in Watt, und durch nochmalige Division mit der Maßsystemkonstanten 9,81 in mkg; so daß:

$$D = \frac{J_1^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1} [r'_m A_1^2 - r''_m A_2^2]}{9{,}81 \cdot \frac{2\pi\nu_2}{p}} \text{ mkg}$$

$$D = \frac{4}{3} J_1^2 \frac{r'_m A_1^2 - r''_m A_2^2}{9{,}81 \cdot \frac{2\pi\nu_1}{p}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

*) S. Starkstromtechnik: Abt. Dynamomasch. S. 568.

Diese Gleichung 8 gestaltet sich besonders einfach, wenn das Anlaufmoment bestimmt werden soll. In diesem Falle ist: $s_1 = s_2 = 1$ und somit $r'_m = r''_m = r'_{m_a}$. Dadurch kommt in der vorstehenden Gleichung im Zähler die Differenz der Quadrate von A_1 und A_2 vor, welche nach den früheren Festsetzungen über diese Faktoren den Wert hat:

$$A_1^2 - A_2^2 = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{3}\ u \sin\gamma$$

Somit läßt sich für das Anlaufmoment D_a die Beziehung anschreiben:

$$D_a = \frac{J_1^2 \cdot r'_{m_a}}{9{,}81 \cdot \frac{2\pi\nu_1}{p}} \cdot 2\sqrt{3}\ u \sin\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Das Anzugsmoment eines Drehstrommotors ist sonach für konstanten Strom und konstantes Verhältnis u direkt proportional dem Sinus der Phasendifferenz zwischen J_I und J_{II}.

Die Abbildung 7 stellt den Verlauf von D_a bei $u = 1$ abhängig von γ dar. Der Ordinatenmaßstab für diese Kurve berechnet sich aus der Annahme:

$$\frac{J_1^2 \cdot r'_{m_a}}{9{,}81 \cdot \frac{2\pi\nu_1}{p}} = 1,$$

wobei J_1 gleich dem für Symmetrie zulässigen J_{max} gesetzt ist. Für Phasenverschiebungen γ zwischen 0 und $\frac{2\pi}{3}$ mußte zur Ermöglichung einer vergleichenden Übersicht, J_1 in derselben Weise reduziert werden, wie bei der Berechnung der Ordinaten zu den Kurven I und II in der Abbildung 3 (vergl. die Ausführungen auf S. 10 u. ff.)

Dadurch, daß J_1 in der Formel für D_a im Quadrat vorkommt, wird in der Fig. 7 das günstige Verhalten des symmetrisch gespeisten Drehstrommotors, im Gegensatz zu den übrigen Stromkombinationen, besonders scharf ausgeprägt. Die Kurve fällt namentlich bei Verkleinerung der Phasenverschiebung γ (gerechnet von dem der Symmetrie entsprechenden Werte $\gamma = 120^0$) sehr stark ab. So entspricht beispielsweise einer Verminderung der Phasendifferenz zwischen J_I und J_{II} um nur sechs Grade bereits eine Abnahme des Anzugsmoments um 10%; einer Vergrößerung von γ um denselben Betrag, eine solche von 7%.

Die im vorstehenden entwickelten Gleichungen über die Leistungsverhältnisse gestatten nunmehr auch in einfacher Weise die Darstellung des Wirkungsgrades η. Dieser ist:

$$\eta = \frac{W_m}{W_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \frac{r'_m A_1^2 - r''_m A_2^2}{r_{m_1} A_1^2 + r_{m_2} A_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Bei symmetrischen Phasenströmen ist $A_2 = 0$ und daher:

$$\eta \text{ symm.} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \frac{r'_m}{r_{m_1}}$$

Der Wirkungsgrad des unsymmetrisch gespeisten Drehstrommotors erfährt somit in doppelter Hinsicht eine Verschlechterung. Denn die Unsymmetrie bewirkt, wie sich aus den vorstehenden Beziehungen entnehmen läßt, nicht nur eine Vergrößerung

der primär zuzuführenden Leistung sondern auch gleichzeitig eine Verminderung des nutzbaren mechanischen Effekts. Die erforderliche Mehrleistung auf der Primärseite dient lediglich dazu, um im Rotor eine Bremswirkung hervorzubringen. Indessen ergibt sich im Zusammenhalt mit dem Maximalwert, welchen das Verhältnis $\frac{A_2}{A_1}$ annehmen kann, daß die Beeinträchtigung des Wirkungsgrades nicht so erheblich ist, wie man nach dem Aufbau der Gleichung 10 vermuten könnte.

Der größte Wert von $\frac{A_2}{A_1}$ ist nach den Kurven der Abbildung 4 gleich eins, und entspricht den Verhältnissen beim Einphasenmotor. Letzterer besitzt demnach von allen Asynchronmotoren den kleinsten Wirkungsgrad, nämlich:

$$\eta \text{ einphas.} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \frac{r'_m - r''_m}{r_{m1} + r_{m2}}$$

Unter diesen Betrag kann also der Wirkungsgrad beim unsymmetrisch gespeisten Drehstrommotor niemals herabsinken. Da sich nun beim Einphasenmotor das Güteverhältnis immer noch innerhalb wirtschaftlicher Grenzen befindet, so ist zu folgern, daß bei unsymmetrischen Phasenströmen eine praktisch beachtenswerte Beeinflussung des Wirkungsgrades ausgeschlossen ist.

Von allen, für das Verhalten des Motors wesentlichen Größen, erfordert nur das Drehmoment und speziell das Anlaufmoment besondere Aufmerksamkeit, denn dieses ist bei aufgehobener Symmetrie den relativ größten Änderungen unterworfen.

Bezüglich des Leistungsfaktors, der bei dem vorliegenden Problem für jede Phase einzeln bestimmt werden muß, lassen sich allgemeine Schlußfolgerungen nicht ableiten. Über sein Verhalten unter dem Einfluß der Unsymmetrie kann nur die Behandlung eines konkreten Falles befriedigenden Aufschluß geben, welche im folgenden Abschnitt durchgeführt ist.

IV. Abschnitt.

Die Anwendung der Theorie des unsymmetrisch gespeisten Drehstrommotors auf den Spezialfall des Bahnbetriebes.

1. Die Bestimmung der Widerstandskoëffizienten einer Mehrphasenleitung bei unregelmäßiger Gruppierung der Phasendrähte.

Die im zweiten Teil dieses Abschnitts verwendeten Zahlenwerte für die Linienkoëffizenten bedürfen hinsichtlich ihrer Herkunft einer Begründung, welche durch die folgende Darstellung in Kürze gegeben werden soll.

Die Induktivität einer Stromschleife ist bekanntlich eine Funktion der Leiteranordnung und der Stromverteilung auf die einzelnen Drähte. Der einfachste Fall wird durch eine Doppelleitung für Einphasen-Wechselstrom repräsentiert, bei welcher in beiden Drähten derselbe Strom aber mit entgegengesetztem Vorzeichen fließt. (Im Leiter $1: i_1$; im Leiter $2: i_2 = -i_1$). Der induktive Spannungsabfall in einer Leitung, z. B. in 1. rührt her von dem Felde Φ_1', welches der Strom i_1 erzeugt und von dem Felde Φ_2'', welches auf den Strom i_2 zurückzuführen ist. Der gesamte mit dem Leiter 1 verkettete Kraftfluß ist daher:

$$\Phi_1 = \Phi'_1 + \Phi''_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Gemäß der Definition der Selbst- und Wechselinduktionskoëffizienten (in der Folge mit λ und entsprechenden Zahlenindexen bezeichnet), wonach diese derjenigen Kraftlinienzahl entsprechen, welche pro Stromeinheit mit dem betreffenden Leiter verkettet ist, kann die Gleichung 1 auch in folgender Form geschrieben werden:

$$i_1 \cdot \lambda_1 = i_1 \cdot \lambda'_1 + i_2 \cdot \lambda'_{21} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

woraus:

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + \frac{i_2}{i_1} \cdot \lambda'_{21} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und bei einer einfachen Wechselstromleitung:

$$\lambda_1 = \lambda'_1 - \lambda'_{21}$$

λ_1 stellt hiebei den Anteil dar, welcher von der gesamten Induktivität der Stromschleife bei gleichmäßiger Verteilung auf die Einzelleitungen für den Leiter 1 entfällt. Er ist gegeben durch den Selbstinduktionskoëffizienten der Leitung 1: λ'_1 und durch

den Wechselinduktionskoëffizienten zwischen den Leitern 1 und 2. Diese Koëffizienten sind nach den Maxwellschen Formeln wie folgt zu berechnen:

$$\lambda'_1 = 10^{-4}\,[4{,}6\,\lg\frac{4\cdot 10^5}{d_1} - 1{,}5] \text{ Henry pro Kilometer} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\lambda''_{21} = 10^{-4}\,[4{,}6\,\lg\frac{2\cdot 10^5}{D} - 2] \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Hierin bezeichnet d_1 den Durchmesser des kreisförmigen Leiterquerschnitts in cm; D den Abstand der Drähte in derselben Maßeinheit. Ferner ist in diesen Gleichungen die Permeabilität der Medien, in denen sich die Kraftlinien ausbilden gleich 1 gesetzt.

Gleichung 2 ist für die Momentanwerte der Ströme aufgestellt; sie gilt aber ohne Einschränkung auch für die Effektivwerte, wenn diese nach Größe und Richtung entsprechend eingesetzt werden. Das Gesamtfeld, mit dem der Leiter 1 verkettet ist, ergibt sich zu $J_I \cdot \lambda_1$. Dieses Feld erzeugt im Draht I eine Gegen-E.M.K. E_g^I, welche hinsichtlich ihrer Größe gleich ist:

$$E_g^I = 2\,\pi\,\nu_1 \cdot \lambda_1 \cdot J^I$$

wobei ν_1 die Periodenzahl des Wechselstromes bedeutet.

In Bezug auf seine Richtung ist E_g^I gegenüber dem induzierenden Feld und damit auch dem Strom J_I um 90^0 phasenverspätet. Daraus folgt die Vektorgleichung:

$$\dot{E}_g^I = j \cdot 2\pi\,\nu_1 \cdot \lambda_1 \cdot \dot{J}_I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Besteht eine Übertragungsleitung aus einer Gruppe von n Drähten, so sind in die Gleichungen für λ_1, λ_2, λ_3 etc. sämtliche Wechselinduktionskoëffizienten zwischen einem dieser Leiter und den ihm jeweils benachbarten n — 1 Drähten der Gruppe einzuführen.

Das liefert die allgemeine Beziehung:

$$\dot{E}_g^I = j \cdot 2\pi\,\nu_1 \cdot \lambda_1 \cdot \dot{J}_I = j \cdot 2\pi\,\nu_1\,[\dot{J}_I \cdot \lambda'_1 + \dot{J}_{II}\,\lambda'_{21} + \dot{J}_{III}\,\lambda'_{31} + \ldots\ldots \dot{J}_n\,\lambda'_{n1}]$$

Ganz analog ergeben sich die Gleichungen für E_g^{II}, E_g^{III} etc. in den übrigen Leitern.

Bei der Stromzuführung im Drehstrom-Bahnbetriebe hat man es mit einer Gruppe von vier Leitern zu tun. Nach dem Streckenprofil der Abbildung 8 entsprechen die Leiter 1 und 2 den Fahrdrähten; 3 und 4 den Schienen. In den Fahrleitungen fließen die Ströme J_I und J_{II}; hinsichtlich der Strombelastung des Gleises wird angenommen, daß sich J_{III} gleichmäßig und ausschließlich auf die beiden Schienen verteile; die Erdströme sind also vernachlässigt.

Die erwähnten Phasenströme J_I, J_{II} und J_{III} müssen in der Folge einmal auf die Richtung von J_I und einmal auf J_{II} bezogen werden. Mit den Bezeichnungen der vorausgegangenen Abschnitte wird dies durch die nachstehenden Gleichungen zum Ausdruck gebracht:

Bezugsrichtung $\dot{J}_I$:

$$\dot{J}_I = \dot{J}_I$$

$$\dot{J}_{II} = \dot{J}_I \cdot u\,(\cos\gamma + j\sin\gamma)$$

$$\dot{J}_{III} = \dot{J}_I\,(-1 - u\,(\cos\gamma + j\sin\gamma))$$

Bezugsrichtung J_{II}:

$$\dot{J}_I = \frac{1}{u} \cdot \dot{J}_{II} (\cos\gamma - j \sin\gamma)$$

$$\dot{J}_{II} = \dot{J}_{II}$$

$$\dot{J}_{III} = \dot{J}_{II} (-1 - \frac{1}{u} (\cos\gamma - j \sin\gamma))$$

Mit diesen Stromrelationen ergibt sich für die induktive Gegen-E.M.K. in der Leitung 1 die Beziehung:

$$\dot{E}_g{}^I = j \cdot \dot{J}_I \cdot 2\pi\nu_1 [\lambda'_1 + u(\cos\gamma + j\sin\gamma)\lambda'_{21} - \frac{1}{2}(1 + u(\cos\gamma + j\sin\gamma))\lambda'_{31}$$

$$- \frac{1}{2}(1 + u(\cos\gamma + j\sin\gamma))\lambda'_{41}]$$

und nach entsprechender Ordnung und Umformung:

$$\dot{E}_g{}^I = j \cdot \dot{J}_I \cdot 2\pi\nu_1 [\lambda'_1 + u\cos\gamma\,\lambda'_{21} - \frac{1}{2}(1 + u\cos\gamma)(\lambda'_{31} + \lambda'_{41})]$$

$$- \dot{J}_I\, 2\pi\nu_1 \cdot u \sin\gamma\,(\lambda'_{21} - \frac{\lambda'_{31} + \lambda'_{41}}{2})$$

$$\underline{\dot{E}_g{}^I = j \cdot k_I \cdot \dot{J}_I - \dot{J}_I \cdot r''_I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Gegen-E.M.K. hat demzufolge relativ zum Strome J_I nicht 90° Phasendifferenz, sondern besitzt auch eine Komponente in Richtung von J_I. Gemäß dem Vorzeichen dieser Komponente entspricht ihr ein Widerstand r''_I, der sich im vorliegenden Falle zu dem Ohmschen Widerstand der Leitung 1 (r'_I) — der aus den Dimensionen und der Materialkonstanten des Drahtes zu berechnen ist — addiert.

Für die Linienkoëffizienten der Leitung 1 gelten demnach folgende Beziehungen:

und:

$$\left.\begin{array}{l} r_I = r'_I + r''_I \text{ ; wobei: } \underline{r''_I = 2\pi\nu_1 \cdot u \sin\gamma \cdot (\lambda'_{21} - \frac{\lambda'_{31} + \lambda'_{41}}{2})} \\ \underline{k_I = 2\pi\nu_1 [\lambda'_1 + u\cos\gamma \cdot \lambda'_{21} - \frac{1}{2}(1 + u\cos\gamma)(\lambda'_{31} + \lambda'_{41}]} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Zur Bestimmung der Widerstandskoëffizienten r_{II} und k_{II} gestaltet sich die Rechnung ganz ähnlich, wobei zu berücksichtigen ist, daß hier die Ströme J_I und J_{III} auf die Richtung von J_{II} bezogen werden müssen (s. oben). Hienach findet man:

$$\left.\begin{array}{l} r_{II} = r'_{II} - r''_{II}; \text{ worin: } \underline{r''_{II} = 2\pi\nu_1 \cdot \frac{1}{u} \sin\gamma\,(\lambda'_{21} - \frac{\lambda'_{31} + \lambda'_{41}}{2}) = \frac{r''_I}{u^2}} \\ \underline{k_{II} = 2\pi\nu_1 [\lambda'_1 + \frac{1}{u}\cos\gamma\,\lambda'_{21} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{u}\cos\gamma)(\lambda'_{31} + \lambda'_{41})]} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

Bei der Formulierung der Gleichungen 9 ist außerdem noch in Betracht gezogen worden, daß infolge der Symmetrieeigenschaften der Leiteranordnung (vergl. hiezu Abb. 8) und der gleichen Drahtdurchmesser von 1 und 2 die Beziehungen gelten:

$$\lambda'_1 = \lambda'_2;\ \lambda'_{21} = \lambda'_{12};\ \lambda'_{31} = \lambda'_{42} \text{ und } \lambda'_{41} = \lambda'_{32}$$

Bei der folgenden Ableitung der Gleichung für die Reaktanz k_{III} ist ferner noch von den Identitäten:

$$\lambda'_{13} = \lambda'_{24};\ \lambda'_{14} = \lambda'_{23};\ \lambda'_3 = \lambda'_4 \text{ und } \lambda'_{43} = \lambda'_{34}$$

Gebrauch gemacht worden.

Für die Schiene, welche die Leitung 3 repräsentiert, ergibt sich die induktive Gegen-E. M. K. E_g^3 zu:

$$\dot{E}_g^3 = j \cdot \frac{\dot{J}_{III}}{2} \cdot 2\pi\nu_1 (\lambda'_3 + \lambda'_{43}) + j \cdot 2\pi\nu_1 (\dot{J}_I \cdot \lambda'_{13} + \dot{J}_{II} \lambda'_{23})$$

und für die Schiene 4:

$$\dot{E}_g^4 = j \cdot \frac{\dot{J}_{III}}{2} \cdot 2\pi\nu_1 (\lambda'_4 + \lambda'_{34}) + j \cdot 2\pi\nu_1 (\dot{J}_I \cdot \lambda'_{14} + \dot{J}_{II} \lambda'_{24})$$

Die Summierung dieser beiden Gleichungen liefert den doppelten Betrag der Reaktanzspannung des Gleises, da die Schienen zwei parallelen Stromverzweigungen der Phase III gleichzuachten sind. Diese Summe ist somit:

$$2\,\dot{E}_g^{III} = \dot{E}_g^3 + \dot{E}_g^4 = j \cdot 2\pi\nu_1 [\dot{J}_{III} (\lambda'_3 + \lambda'_{34}) + (\dot{J}_I + \dot{J}_{II}) (\lambda'_{31} + \lambda'_{14})]$$

Da nun: $\dot{J}_I + \dot{J}_{II} = -\dot{J}_{III}$, so wird:

$$2\,\dot{E}_g^{III} = j \cdot \dot{J}_{III} \cdot 2\pi\nu_1 [\lambda'_3 + \lambda'_{34} - (\lambda'_{31} + \lambda'_{14})]; \text{ woraus:}$$

$$k_{III} = 2\pi\nu_1 \cdot \frac{1}{2} [\lambda'_3 + \lambda'_{34} - (\lambda'_{31} + \lambda'_{14})] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die Geleisreaktanz k_{III} ist somit von der Stromverteilung vollkommen unabhängig. Ferner besitzt die Gegen-E. M. K. E_g^{III} im Gegensatz zu E_g^I und E_g^{II} keine Komponente, welche gleich oder entgegengesetzt zur Stromrichtung J_{III} ist. r_{III} ist daher lediglich der errechnete Ohmsche Widerstand aus den Dimensionen und der Materialkonstanten der Schienen.

Die Bestimmung des Selbstinduktionskoëffizienten λ'_3 beim Geleise, weicht von derjenigen für die Fahrleitungen (Gleichung 4) insofern ab, als hiebei der Permeabilität des Schienenmaterials Rechnung getragen werden muß. Die Gleichung 4 erfährt dadurch folgende Änderung:

$$\lambda'_3 = 10^{-4} \left[4,6 \lg \frac{4 \cdot 10^5}{d_2} + \frac{\mu}{2} - 2\right] \text{ Henry pro Kilometer} \quad (11)$$

μ bedeutet hierin nicht direkt die Permeabilität, sondern ist lediglich als eine Materialkonstante aufzufassen, welche auf experimentellem Wege ermittelt, und so bemessen ist, daß nach Gleichung 11 das Resultat der Rechnung mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt. Für d_2 ist der Durchmesser eines dem Schienenprofil inhaltsgleichen Kreises einzusetzen.

In Gleichung 5, welche zur Bestimmung von λ'_{34} verwendet wird, entspricht beim Geleise die Dimension D der Spurweite S in cm. Daher ist zu schreiben:

$$\lambda'_{34} = 10^{-4} \left[4,6 \lg \frac{2 \cdot 10^5}{S} - 2\right] \text{ Hy/Kilom.} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Führt man in die Formeln zur Bestimmung der Linienreaktanzen die Gleichungen 4, 5, 11 und 12 ein, so ergibt sich für diese Größen folgende Zusammenstellung, in der die Leiterentfernungen mit den in der Abbildung 8 gewählten Bezeichnungen in Einklang gebracht sind.

$$k_I = 2\pi\nu_1 \left[4,6 \lg \frac{\sqrt{D_3 D_4}}{\frac{d_1}{2}} + 0,5 + u \cos\gamma\, 4,6 \lg \frac{\sqrt{D_3 D_4}}{D_1}\right] 10^{-4} \text{ Ohm/km}$$

$$k_{II} = 2\pi\nu_1 \left[4,6 \lg \frac{\sqrt{D_3 D_4}}{\frac{d_1}{2}} + 0,5 + \frac{1}{u} \cos\gamma \cdot 4,6 \lg \frac{\sqrt{D_3 D_4}}{D_1}\right] 10^{-4} \quad \text{„}$$

$$k_{III} = 2\pi\nu_1 \left[2,3 \lg \frac{D_3 D_4}{\frac{d_2}{2} \cdot S} + \frac{\mu}{4}\right] \cdot 10^{-4} \text{ *) Ohm/Kilom.}$$

(13)

und für die zusätzlichen Widerstände r''_I und r''_{II} in den Fahrdrähten:

$$r''_I = 2\pi\nu_1 \cdot u \sin\gamma \cdot 4,6 \lg \frac{\sqrt{D_3 D_4}}{D_1} \cdot 10^{-4} \text{ Ohm/km}$$

$$r''_{II} = \frac{r''_I}{u^2} \quad \text{„}$$

. . . . . (14)

Der Umstand, daß die Linienkoëffizienten r_I, r_{II} und k_I, k_{II} selbst wieder Funktionen der Unsymmetrie sind, bringt in das Problem des unsymmetrisch gespeisten Drehstrommotors eine neue Komplikation. Die Berücksichtigung der, mit den Größen u und γ veränderlichen Impedanzen der Linie bei den Entwicklungen im II. Abschnitt, würde zwar ohne Schwierigkeiten möglich sein, ist jedoch bei dem Spezialfall der Drehstrombahn nicht erforderlich. Es genügt vielmehr, die Koëffizienten der Gleichungen 13 und 14 unter der Annahme einer symmetrischen Belastung der Linie zu ermitteln. Hiedurch wird: $k_I = k_{II}$ und $r''_I = r''_{II}$.

Im Verlaufe der nachstehenden Rechnungen erweist sich diese vereinfachende Annahme hinsichtlich der Stromverteilung bei dem vorliegenden Beispiel als durchaus zuläßig.

2. Zahlenbeispiel.

Die zahlenmäßige Festlegung der Streckenlänge, durch welche die Widerstandskoëffizienten der Linie, welche dem Motor vorgeschaltet ist, erst eindeutig bestimmt werden, erfolgte in der Erwägung, daß zur allgemeinen Beurteilung des Verhaltens der Drehstrommotoren im Bahnbetriebe zunächst der ungünstigste Fall ins Auge zu fassen ist, welcher bei einer bestimmten Anlage auftreten kann. Dieser ist offenbar dann gegeben, wenn sich die Maschine in der größtmöglichen Entfernung von einem Speisepunkt befindet. Unter der Voraussetzung, daß der mittlere Abstand zweier Speisepunkte 10 Kilometer beträgt (Valtellinabahn) ist somit als maximale Ausdehnung der Linie eine Übertragungsweite von **5 km** anzunehmen.

Im einzelnen sind der Streckenausrüstung folgende Daten zu Grunde gelegt:

Fahrdrahtquerschnitt: 80 mm²; $d_1 = 1{,}01$ cm.
Abstand der Fahrdrähte: $D_1 = 100$ cm,
Aufhängehöhe der Fahrdrähte: $D_2 = 600$ cm; womit aus Abbildung 8
$D_3 \cong 600$ cm und
$D_4 = 612$ cm entnommen werden kann.
Spurweite: $S = 143{,}5$ cm, Schienengewicht: 43,5 kg/m; $\nu_1 = 15$; $\mu = 16$ bis 20.

*) Vergl. Starkstromtechnik, Abschn. XI, S. 1078.

Zunächst berechnet sich der Fahrdrahtwiderstand r'_I pro Kilometer zu:

$$r'_I = r'_{II} = \frac{1000}{80 \cdot 57} \sim 0{,}22 \text{ Ohm/km.}$$

Der zusätzliche Widerstand r''_I (bei Symmetrie $= r''_{II}$) wird:

$$r''_I = r''_{II} = 2\pi\nu_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4{,}6 \cdot 0{,}782 \cdot 10^{-4} = 0{,}0294 \text{ Ohm/km,}$$

somit ergibt sich für die Strecke:

$$\underline{r_I = 5\,(0{,}22 + 0{,}0294) = 1{,}25 \text{ Ohm.}}$$

$$\underline{r_{II} = 5\,(0{,}22 - 0{,}0294) = 0{,}95 \text{ Ohm.}}$$

Der Schienenwiderstand für Gleichstrom ist:

$$r_{IIIg} = \frac{1000}{5{,}5 \cdot 5620} = 0{,}0324 \text{ Ohm/km.}$$

Für Wechselstrom ist dieser Wert nach experimentellen Ergebnissen*) bei einer Periodenzahl $\nu_1 = 15$ und ungefähr 100 Ampère Stromstärke ca. 2,9 mal größer:

$$r_{IIIw} = 0{,}094 \text{ Ohm/km.}$$

Hiezu tritt noch der Widerstand der Schienenstöße mit 0,021 Ohm/km ($84 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4}$), so daß der Gesamtwiderstand einer Schiene sich zu:

$r'_{III} = 0{,}115$ Ohm/km berechnet. Der Widerstand des Gleises für 5 km ist demnach:

$$\underline{r_{III} = \frac{5}{2} \cdot 0{,}115 = \sim 0{,}29 \text{ Ohm.}}$$

Die Reaktanzen ergeben sich nach den Gleichungen 13 ds. Abschnitts wie folgt:

$$\underline{k_I = k_{II}} = 5 \cdot 94{,}3\,[4{,}6 \cdot 3{,}083 + 0{,}5 - 2{,}3 \cdot 0{,}782] \cdot 10^{-4} = \underline{0{,}604 \text{ Ohm}}$$

und:

$$\underline{k_{III}} = 5 \cdot 94{,}3\,[2{,}3 \cdot 2{,}782 + 4{,}5] \cdot 10^{-4} = \underline{0{,}51 \text{ Ohm.}}$$

(In der Gleichung für k_{III} ist μ mit dem Mittelwert 18 eingesetzt.)

Die elektrischen Konstanten des Motors haben folgende Werte:**)

Primäre Reaktanz pro Phase bei $\nu_1 = 15$ . . .	k_1	= 34,6	Ohm
Primäre Streureaktanz pro Phase bei $\nu_1 = 15$ . .	$k_{1\sigma}$	= 0,675	„
Primärer Widerstand pro Phase	r_1	= 0,245	„
Sekundäre Reaktanz pro Phase bei $\nu_1 = 15$ . .	k_2	= 1,384	„
Sekundäre Streureaktanz pro Phase bei $\nu_1 = 15$.	$k_{2\sigma}$	= 0,027	„
Sekundärer Widerstand pro Phase	r_2	= 0,01	„

Zahl der Polpaare: $p = 4$; somit die synchrone Tourenzahl:

$$\mu_s = 225.$$

Die verkettete Spannung Δ, welche am Anfang der Linie konstant gehalten wird, betrage:

$$\Delta = 3000 \text{ Volt.}$$

---

*) s. d. Versuche von L. Lichtenstein, E. T. Z. 1907.

**) Diese Zahlenangaben sind einer Diplomprüfungsaufgabe entnommen, welche von Prof. Ossanna im Jahre 1907 gestellt wurde.

Aus den obigen Daten berechnet sich noch die Wechselreaktanz:

$$k_{12} = k_{21} = 6{,}78 \text{ Ohm bei } 15 \text{ Perioden.}$$

In den Gleichungen, welche in der Folge zur Anwendung gelangen, kommen wiederholt die Werte: r_m', r_m''; r_{m1} und r_{m2}, sowie k_{m1} und k_{m2} vor. Diese sind daher, für eine Reihe verschiedener Schlüpfungen berechnet, in der nachstehenden Zahlentafel tabellarisch zusammengestellt und in Abbildung 9 abhängig von s_1 graphisch dargestellt worden. Die dort gezeichneten Kurven für r_{m2} und k_{m2} bestätigen die allgemeinen Schlüsse, welche früher (s. S. 26) über das Verhalten dieser Größen bei verschiedenen Schlüpfungen gezogen worden sind.

Dieser Zusammenstellung sind auch die Werte der Motorkoëffizienten r_m und k_m für den (normalen) Fall der Verwendung eines Anlaßwiderstandes im Rotorstromkreise beigefügt. Dieser wurde so bemessen, daß die Anlaufstromstärke etwa 200 Ampère beträgt. Er berechnet sich hiemit zu rund 0,29 Ohm, so daß beim Anlauf mit Widerstand $r'_2 = 0{,}30$ Ohm zu setzen ist.

Zusammenstellung:

Linienkoëfffzienten:

$$r_I = 1{,}25 \qquad r_{II} = 0{,}95 \qquad r_{III} = 0{,}29$$
$$k_I = k_{II} = 0{,}60 \qquad k_{III} = 0{,}51.$$

Motorkoëffizienten:

Nr.	s_1	r'_m	r''_m	r_{m1}	r_{m2}	k_{m1}	k_{m2}
1	0	0	0,120	0,245	0,365	34,6	1,40
2	0,005	15,8	.	16,05	.	23,84	.
3	0,01	15,74	.	16,0	.	12,8	.
4	0,015	12,96	.	13,2	.	7,7	.
5	0,02	10,6	.	10,85	.	5,25	.
6	0,025	8,85	.	9,09	.	4,00	.
7	0,03	7,55	.	7,80	.	3,20	.
8	0,035	6,58	.	6,83	.	2,80	.
9	0,04	5,8	.	6,05	.	2,50	.
10	0,05	4,7	0,123	4,95	0,368	2,10	1,40

Bei Anlauf mit 0,29 Ohm Anlaßwiderstand zwischen den Rotorschleifringen ergibt sich:

$$r'_m = r_m'' = 6{,}87; \quad r_{m1} = r_{m2} = 7{,}115 \text{ und } k_{m1} = k_{m2} = 2{,}90.$$

In erster Linie sind nun mit den vorstehenden Zahlenwerten die charakteristischen Größen der Unsymmetrie: u und γ zu bestimmen. Hiefür wurden im II. Abschnitt die Gleichungen 46 und 47 aufgestellt, nämlich:

$$u = \sqrt{\frac{a_1 + m_1 r_{m_2} + m_2 k_{m_2} + 3(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}{a_2 + n_1 r_{m_2} + n_2 k_{m_2} + 3(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}}$$

und:
$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{a_3 + p_1 r_{m_2} + p_2 k_{m_2} + 3\sqrt{3}(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}{a_4 + q_1 r_{m_2} + q_2 k_{m_2} + 3(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}$$

Für die Faktoren: a, m und n ergeben sich im vorliegenden Fall die Werte:

$$a_1 = 3{,}73 \qquad m_1 = 4{,}46 \qquad m_2 = 5{,}0$$
$$a_2 = 1{,}66 \qquad n_1 = 3{,}88 \qquad n_2 = 2{,}19$$

so daß:
$$u = \sqrt{\frac{3{,}73 + 4{,}46\, r_{m_2} + 5\, k_{m_2} + 3(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}{1{,}66 + 3{,}88\, r_{m_2} + 2{,}19\, k_{m_2} + 3(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}}$$

ferner ist:
$$a_3 = 4{,}87 \qquad p_1 = 8{,}62 \qquad p_2 = 5{,}93$$
$$a_4 = 0{,}968 \qquad q_1 = 1{,}74 \qquad q_2 = 4{,}10$$

woraus:
$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{4{,}87 + 8{,}62\, r_{m_2} + 5{,}93\, k_{m_2} + 3\sqrt{3}(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}{0{,}968 + 1{,}74\, r_{m_2} + 4{,}10\, k_{m_2} + 3(r_{m_2}^2 + k_{m_2}^2)}$$

Gemäß den früheren Ausführungen über den Zusammenhang von u und γ mit der Schlüpfung, sind diese Größen zu berechnen für Anlauf und für denjenigen Schlüpfungsbereich, welcher den normalen Umdrehungszahlen des Motors entspricht.

a) Für Anlauf (mit Anlaßwiderstand) ist: $r_{m_2} = 7{,}115$ und $k_{m_2} = 2{,}90$ demnach:

$$\underline{u_a = \sqrt{\frac{227{,}3}{213{,}0}} = 1{,}035} \quad \text{und} \quad \underline{\operatorname{tg}\gamma_a = -\frac{390{,}27}{202{,}5} = -1{,}927}$$

b) Für normale Schlüpfungen innerhalb 0 und 5% ist r_{m_2} im Mittel $= 0{,}367$ und $k_{m_2} = 1{,}40$ somit:

$$\underline{u_n = \sqrt{\frac{18{,}66}{12{,}44}} = 1{,}225} \quad \text{und} \quad \underline{\operatorname{tg}\gamma_n = -\frac{24{,}4}{13{,}64} = -1{,}789}$$

Beim Anlauf unterscheiden sich die errechneten Werte u_a und γ_a so wenig von denjenigen, welche symmetrischen Strömen entsprechen, daß sich eine weitere Behandlung dieses Betriebszustandes erübrigt. Die weiteren Untersuchungen beziehen sich daher ausschließlich auf das Verhalten des Motors bei normalen Umdrehungszahlen. Aus $\operatorname{tg}\gamma = -1{,}789$ folgt:

$$\gamma = 119^0; \quad \sin\gamma = 0{,}875 \text{ und } \cos\gamma = -0{,}485.$$

Während somit die Phasenverschiebung γ zwischen J_I und J_{II} sich nur ganz wenig von derjenigen bei symmetrischen Phasenströmen unterscheidet, differiert das Größenverhältnis dieser Ströme u um 22,5% gegenüber der Einheit. Diese Differenz ist jedenfalls so groß, daß sie auch praktisch nicht mehr als unwesentlich bezeichnet werden kann. Ob und inwieweit diese Störung der Symmetrie die Betriebseigenschaften des Motors beeinflußt, läßt sich jedoch erst auf Grund der nachfolgenden Berechnungen entscheiden.

Nachdem nunmehr die tatsächlichen Stromverhältnisse im vorliegenden Falle bekannt sind, ist zunächst zu prüfen, welche Vernachlässigungen dadurch begangen wurden, daß bei der Ermittlung der Linienreaktanzen die Unsymmetrie der Stromverteilung in den Zuleitungen unberücksichtigt blieb.

Für $u = 1{,}225$ und $\gamma = 119^0$ nehmen diese Koëffizienten der Linie, soweit sie Funktionen der Stromverteilung sind, folgende Werte an:

$$k_I = 0{,}693 - 1{,}225 \cdot 0{,}485 \cdot 0{,}1695 = 0{,}592\ (0{,}60)$$
$$k_{II} = 0{,}693 - 0{,}817 \cdot 0{,}485 \cdot 0{,}1695 = 0{,}626\ (0{,}60)$$
$$r_I = 1{,}10 + 1{,}225 \cdot 0{,}875 \cdot 0{,}1695 = 1{,}282\ (1{,}25)$$
$$r_{II} = 1{,}10 - 0{,}817 \cdot 0{,}875 \cdot 0{,}1695 = 0{,}979\ (0{,}950)$$

Ein Vergleich mit den Zahlen, welche den bisherigen Berechnungen zu Grunde liegen (in Klammern beigefügt), läßt erkennen, daß die Differenz im äußersten Falle den Betrag von 4% erreicht und demzufolge eine Wiederholung der Rechnung mit den genauen Werten nicht erforderlich ist.

Die nächste Aufgabe besteht in der Bestimmung des Stromes J_1, für welchen die Gleichung 48 im II. Abschnitt nunmehr folgende Form annimmt:

$$\dot{\Delta} = \dot{J}_1 [0{,}867 + 1{,}725\, r_{m1} - 0{,}886\, k_{m1} - j\,\{1{,}86 + 1{,}725\, k_{m1} + 0{,}886\, r_{m1}\}]$$

Aus J_1, u und γ wird:

$$J_{II} = u \cdot J_1 = 1{,}225\, J_1$$
$$J_{III} = \sqrt{1 + u^2 + 2u \cos\gamma}\, J_1 = \alpha \cdot J_1 = 1{,}144\, J_1$$

In der Gleichung für die primär aufgenommene Leistung:

$$W_1 = J_I^2 \cdot \frac{4}{3} [r_{m1} A_1^2 + r_{m2} A_2^2]$$

kommen die Faktoren A_1 und A_2 vor, für welche die Beziehungen gelten:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 + u^2 + u \cos\gamma + \sqrt{3}\, u \sin\gamma}$$
$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 + u^2 + u \cos\gamma - \sqrt{3}\, u \sin\gamma}$$

so daß:

$$A_1^2 = 2{,}82 \quad \text{und} \quad A_2^2 = 0{,}0375$$

Der kleinste Wert von r_{m1} für Schlüpfungen zwischen 0,5 und 5% ist 4,95, womit: $r_{m1} A_1^2{}_{min} = 13{,}92$. $r_{m2} A_2^2$ ist innerhalb dieses Schlüpfungsbereiches mit großer Annäherung als konstant anzusehen, nämlich gleich: 0,0138 und kann infolgedessen bei der Berechnung von W_1 vernachlässigt werden. Dasselbe gilt auch hinsichtlich des Wertes $r''_m A_2^2$ gegenüber $r'_m A_1^2$, so daß für die Ermittlung der mechanischen Leistung die vereinfachte Beziehung:

$$W_m = J_I^2 \cdot \frac{4}{3} (1 - s_1)\, r'_m A_1^2$$

verwendet werden darf.

Ebenso ist mit dieser Vernachlässigung das Drehmoment D aus der Gleichung:

$$D = (J_I^2 \cdot \frac{4}{3} r_m' A_1^2) \cdot 4{,}33$$

zu bestimmen, wobei das Produkt:

$$J_I^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot r_m' A_1^2$$

in Kilowatt einzuführen ist.

Der Wirkungsgrad η ist nach Kenntnis von W_1 und W_m am einfachsten direkt aus dem Verhältnis dieser Größen zu berechnen.

Für die Bestimmung der Phasenspannungen: Δ_1, Δ_2 und Δ_3 sind die im Abschnitt III aufgestellten Gleichungen 2 heranzuziehen, welche für die speziellen Werte des Beispiels wie folgt lauten:

$$\dot{\Delta}_1 = \dot{J}_I \ [1{,}12\, r_{m1} + 0{,}055\, k_{m1} - 0{,}121 - j\,\{1{,}12\, k_{m1} - 0{,}055\, r_{m1} - 0{,}148\}]$$

$$\dot{\Delta}_2 = \dot{J}_{II} \ [0{,}912\, r_{m1} + 0{,}06\, k_{m1} - 0{,}0521 - j\,\{0{,}912\, k_{m1} - 0{,}06\, r_{m1} + 0{,}144\}]$$

$$\dot{\Delta}_3 = \dot{J}_{III} \ [0{,}972\, r_{m1} - 0{,}11\, k_{m1} + 0{,}164 - j\,\{0{,}972\, k_{m1} + 0{,}11\, r_{m1} - 0{,}0016\}]$$

Diese Beziehungen geben die drei Phasenspannungen nach Größe und Richtung — letztere in Bezug auf den zugehörigen Phasenstrom — und somit auch gleichzeitig die Leistungfaktoren: $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$ und $\cos\varphi_3$. Mit Hilfe der letzteren sind schließlich noch die Leistungen W_I, W_{II} und W_{III} in den einzelnen Phasen der Primärwicklung zu bestimmen.

Die sämtlichen bisher ermittelten Grössen, welche eine erschöpfende Kritik über das Verhalten des Motors ermöglichen, sind in der Zahlentafel auf S. 43 tabellarisch zusammengestellt und teilweise in den Schaulinien der Abbildungen 13 u. 14 verwertet.

Die unverhältnismäßig hohen Wirkungsgrade (vergl. die Tabelle), namentlich bei den kleinsten Schlüpfungen, sind damit zu erklären, daß bei ihrer Berechnung die Reibungs- und Eisenverluste nicht in Betracht gezogen sind. Diese verschieben aber gerade bei den hohen Tourenzahlen, wo der Motor nur mehr eine kleine mechanische Leistung abgibt, die Werte von η ganz wesentlich. Da jedoch der Wirkungsgrad bei dem vorliegenden Problem nur untergeordnetes Interesse besitzt (vergl. hiezu die Ausführungen am Schluß des III. Abschnitts) so ist von der Anbringung einer Korrektur abgesehen und auch die Aufnahme der η Kurven unter die Schaulinien der Abbildungen 13 und 14 unterlassen worden.

Die tabellarische Zusammenstellung auf der folgenden Seite enthält in der ersten Horizontalreihe auch Angaben für die Schlüpfung $s_1 = 0$. Für diesen Fall ist zu beachten, daß hier die Vernachlässigungen, welche auf S. 41 für Schlüpfungen innerhalb 0,5 und 5% als zulässig begründet wurden, nicht mehr gestattet sind. Denn beim synchronen Gang wird $r_{m1} < r_{m2}$ und $r'_m = 0$. Es kommen daher in den entsprechenden Gleichungen die Glieder $r_{m2} A_2^2$ und $r''_m A_2^2$ vorwiegend bezw. ausschließlich in Betracht. Aus den Ergebnissen folgt, daß dem Motor in diesem Betriebszustande sowohl elektrische, als auch mechanische Leistung — letztere allerdings bei den vorliegenden Verhältnissen nur in verschwindendem Betrage — zugeführt werden müßte; der Wirkungsgrad wird infolgedessen negativ. Hinsichtlich der in der letzten Spalte der Tabelle angegebenen Stromwärmeverluste: $(1 - \eta) W_1 = V$, sei vorerst auf die Ausführungen am Schluß dieses Abschnitts verwiesen.

Zur Vervollständigung der theoretischen Untersuchungen über die Vorgänge im unsymmetrisch gespeisten Drehstrommotor, sollen zunächst im Anschluß an die ermittelten Zahlenwerte, die hauptsächlichsten Beziehungen, von denen bei den Entwicklungen im II. Abschnitt ausgegangen wurde, in der Form von Diagrammen für einen bestimmten Betriebszustand dargestellt werden.

Die Konstruktion dieser Diagramme (Abbildungen 10, 11 und 12), denen die Zahlenwerte entsprechend einer Schlüpfung von 3,5% zu Grunde liegen, hat von den

Nr.	s_1	J_I	J_{II}	J_{III}	$W_{1\,KW}$	$W_{m\,KW}$	$D_{m\,kg}$	η %
1	0	44,0	53,8	50,3	1,825	—0,012	.	—0,66
2	0,005	52,0	63,75	59,5	163	158	694	97,0
3	0,01	71,7	88,0	81,9	310	301	1320	97,2
4	0,015	94,7	116,0	108,3	445	428	1880	96,2
5	0,02	118,1	144,7	135,0	570	545	2410	95,7
6	0,025	141,0	172,5	161,3	680	646	2870	95,1
7	0,03	163,8	200,5	187,3	786	738	3300	94,0
8	0,035	184,0	225,2	210,7	870	808	3625	93,0
9	0,04	204,5	250,5	234,0	950	872	3940	91,8
10	0,05	241,0	295,0	276,0	1080	975	4440	90,2

Nr.	Δ_1	Δ_2	Δ_3	$\cos\varphi_1$	$\cos\varphi_2$	$\cos\varphi_3$	W_I	W_{II}	W_{III}	$(1-\eta)\,W_1 = V$
1	1695	1706	1700	0,053	0,071	—0,100	3,96	6,51	—8,6	.
2	1665	1680	1677	0,599	0,608	0,467	51,8	65,1	46,5	4,9
3	1632	1652	1643	0,812	0,816	0,710	95,0	118,6	95,6	9,0
4	1608	1625	1632	0,890	0,891	0,806	135,3	167,8	142,4	16,9
5	1578	1595	1607	0,924	0,922	0,848	172,0	212,5	183,6	24,4
6	1550	1570	1590	0,938	0,934	0,869	205,0	253,0	222,6	33,3
7	1530	1545	1570	0,953	0,943	0,881	238,5	292,2	259,0	47,2
8	1492	1520	1550	0,947	0,942	0,883	260,0	322,5	288,5	61,0
9	1463	1500	1525	0,942	0,939	0,882	282,0	352,5	314,5	78,0
10	1413	1450	1488	0,940	0,933	0,879	320,0	399,0	360,5	106,0

verketteten Spannungen Δ am Anfang der Linie auszugehen (s. Abb. 10). Diese sind durch die Seiten des Dreiecks 1' 2' 3' gegeben. Aus der Vektorgleichung zwischen J_1 und Δ ist auch die Richtung von J_1 in Bezug auf die erste der drei verketteten Spannungen, als welche hier 2' 1' anzusehen ist, bekannt. Die Auswertung dieser Gleichung liefert mit den einschlägigen Zahlenwerten die Beziehung:

$$\dot{J}_1 = \frac{\dot{\Delta}}{16{,}3}(0{,}626 + j \cdot 0{,}783) = 184\,(\cos\delta + j \sin\delta)$$

J_1 eilt somit der Spannung 2' 1' um den Winkel δ nach.

Nachdem auf diese Weise das Stromdiagramm gegenüber dem Spannungsdiagramm orientiert ist, können nunmehr die Spannungsverluste in den drei Phasen der Linie nach Größe und Richtung aufgetragen werden. Diese ergeben sich wie folgt:

In Phase I: $\varepsilon_I = J_I \sqrt{r_I^2 + k_I^2} = 255$ Volt; mit den Komponenten: -230 V. und $+ j \cdot 110$ V.

In Phase II: $\varepsilon_{II} = J_{II} \sqrt{r_{II}^2 + k_{II}^2} = 260$ V.; mit den Komponenten: -214 V. und $+ j\,135$ V.

In Phase III: $\varepsilon_{III} = J_{III} \sqrt{r_{III}^2 + k_{III}^2} = 123{,}5$ V.; mit den Komponenten: $-61{,}2$ V. und $+ j \cdot 107{,}5$ V.

Diesen Spannungsverlusten ε_I, ε_{II} und ε_{III} entsprechen im Diagramm die Strecken: 1'1; 2'2 und 3'3. Die Seiten des Dreiecks 1 2 3 sind identisch mit den drei Klemmenspannungen des Motors. Um von diesen auf die Phasenspannungen zu gelangen, wird jetzt zweckmäßig die in Gleichung 31 II. Abschnitt ausgesprochene Beziehung verwendet, wonach:

$$\dot{\Delta}_1 + \dot{\Delta}_2 + \dot{\Delta}_3 = 0$$

Dieser Bedingung entsprechen in einem Dreieck die Verbindungslinien der Ecken mit dessen Schwerpunkt. In dem Spannungsdreieck: 1 2 3 der Figur 10 ist der Schwerpunkt mit O' bezeichnet. Demzufolge entsprechen den Phasenspannungen Δ_1, Δ_2 und Δ_3 die Strecken O'_1; O'_2 und O'_3. Der Abstand des Schwerpunktes O' von demjenigen des Dreiecks 1' 2' 3' (mit O bezeichnet) stellt die Potentialdifferenz zwischen dem Sternpunkt des Generators und dem Sternpunkt der Statorwicklung des Motors dar; im vorliegenden Falle 60 Volt. Durch Verschiebung des Stromdiagramms parallel zu sich selbst können nunmehr die Anfänge der Strom- und Spannungsvektoren in O' zur Deckung gebracht und damit auch die Leistungsfaktoren: $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$ und $\cos\varphi_3$ direkt dem Diagramm entnommen werden.

Nach Abzug des Ohmschen Spannungsabfalles E_{1R} und der Streuspannung $E_{1\sigma}$ von den Phasenspannungen Δ_1, Δ_2 und Δ_3 erhält man schließlich die der primären und sekundären Wicklung gemeinsame EMK E_g, welche beim Transformator der Umsetzungsspannung entspricht. Im einzelnen ergibt sich:

$E_{1R}^{I} = -45$ V.; $\dot{E}_{1\sigma}^{I} = j \cdot k_{1\sigma} \cdot \dot{J}_I = j \cdot 124$ V.; $E_g^{I} = 1415$ V.

$E_{1R}^{II} = -55$ V.; $\dot{E}_{1\sigma}^{II} = j \cdot k_{1\sigma} \cdot \dot{J}_{II} = j \cdot 152$ V.; $E_g^{II} = 1420$ V.

$E_{1R}^{III} = -52$ V.; $\dot{E}_{1\sigma}^{III} = j \cdot k_{1\sigma} \cdot \dot{J}_{III} = j \cdot 142$ V.; $E_g^{III} = 1460$ V.

In dem Diagramm der Abbildung 10 ist in den einzelnen Phasen mit $-E_g$ diejenige Komponente der Klemmenspannung Δ' bezeichnet, welche diese vom gemein-

samen resultierenden Feld in der Primärwicklung induzierten EMKe kompensiert. Letztere können aber auch dadurch gefunden werden, daß man die Vektorgleichungen der Primärwicklung (S. 19, Gleichungen 29) graphisch darstellt und hieraus die E_g konstruiert. Denn aus den erwähnten Gleichungen folgen für diese E.M.Ke die Beziehungen:

$$\dot{E}_g{}^{I} = \dot{E}_{11}{}^{I} + \dot{E}_{21}{}^{I} + \dot{E}_{31}{}^{I}$$
$$\dot{E}_g{}^{II} = \dot{E}_{11}{}^{II} + \dot{E}_{21}{}^{II} + \dot{E}_{31}{}^{II}$$
$$\dot{E}_g{}^{III} = \dot{E}_{11}{}^{III} + \dot{E}_{21}{}^{III} + \dot{E}_{31}{}^{III}$$

Die Komponenten E_{11} sind durch die Gleichung:

$$\dot{E}_{11} = j \cdot k_{11} \cdot \dot{J}$$

gegeben, wenn J irgend einen Phasenstrom bezeichnet. Die primäre, nichtstreuende Selbstreaktanz folgt aus k_1 und $k_{1\sigma}$ zu:

$$k_{11} = k_1 - k_{1\sigma} = 33{,}925$$

Gemäß der Vektorgleichung zwischen E_{11} und J sind diese Spannungen in dem Diagramm, Abbildung 11, jeweils um 90° nach den Strömen J_I, J_{II} und J_{III} eingetragen. Ihre Größe ergibt sich bei der für diese Darstellungen gewählten Schlüpfung $s_1 = 0{,}035$ zu:

$$E_{11}{}^{I} = 6250 \text{ Volt}$$
$$E_{11}{}^{II} = 7650 \quad \text{„}$$
$$E_{11}{}^{III} = 7150 \quad \text{„}$$

Die durch Wechselinduktion erzeugten E.M.K$_e$ E_{21} und E_{31} sind nach den Gleichungen 34 und 35 S. 21 zu berechnen, wonach:

$$E_{21}{}^{I} = j \cdot k_{21} \cdot \dot{J}_2 = -\dot{J}_1 \frac{1}{2\sqrt{3}} [r_m' (\sqrt{3} + 2u \sin\gamma) + k_m' (1 + 2u \cos\gamma)$$
$$+ j \{k_m' (\sqrt{3} + 2u \sin\gamma) - r_m' (1 + 2u \cos\gamma)\}]$$

und:

$$E_{31}{}^{I} = j \cdot k_{31} \dot{J}_3 = -\dot{J}_1 \frac{1}{2\sqrt{3}} [r_m'' (\sqrt{3} - 2u \sin\gamma) - k_m'' (1 + 2u \cos\gamma)$$
$$+ j \{k_m'' (\sqrt{3} - 2u \sin\gamma) + r_m'' (1 + 2u \cos\gamma)\}]$$

Für das Diagramm ergeben sich hiemit die Werte:

$\dot{E}_{21}{}^{I} = 6700 [-0{,}154 - j \cdot 0{,}986]$ in Bezug auf J_I

$\dot{E}_{31}{}^{I} = 795 \; [-0{,}419 + j \cdot 0{,}908]$ ebenfalls in Bezug auf die Richtung von J_I.

In den Phasen II und III sind die Komponenten E_{21} und E_{31} von der gleichen Größe wie $E_{21}{}^{I}$ bezw. $E_{31}{}^{I}$; der Richtung nach sind sie aber gegenüber den letzteren derart versetzt, daß in Phase II E_{21} dem $E_{21}{}^{I}$ um 120° und in Phase III um 240° nacheilt. E_{31} dagegen ist in Phase II dem $E_{31}{}^{I}$ um 120° und in Phase III um 240° voraus.

(In der Abbildung 11 sind die E_{31} sowohl als selbständige Vektoren — kurz mit 1, 2, 3 bezeichnet — als auch im E.M.K. Polygon jeder Phase eingetragen.)

Die Vereinigung der Komponenten E_{11}, E_{21} und E_{31} ergibt nun in jeder Phase eine E.M.K. E_g, welche innerhalb der zeichnerischen Genauigkeit vollständig mit derjenigen nach Größe und Richtung übereinstimmt, welche im Diagramm der Abbildung 10 durch Konstruktion aus der primären Klemmenspannung erhalten wurde.

Fig. 12 zeigt schließlich noch das Ampère-Windungs-Diagramm des Motors für denselben Betriebszustand, für welchen die vorhergehenden Diagramme entworfen sind. Hiebei sind die Sekundärströme J_2 und J_3 im Verhältnis der primären und sekundären Windungszahlen derart reduziert, daß ein Diagramm für das Übersetzungsverhältnis 1 entsteht. Nach der Definition der nichtstreuenden Selbstreaktanzen hat letzteres im vorliegenden Falle den Wert:

$$\sqrt{\frac{k_{11}}{k_{22}}} = \sqrt{\frac{33{,}925}{1{,}357}} = \underline{5}$$

Für die Rotorströme J_2 und J_3 gelten die Vektorgleichungen:

$$j \cdot k_{21} \cdot \dot{J}_2 = \dot{E}_{21} \text{ und } j \cdot k_{31} \cdot \dot{J}_3 = \dot{E}_{31} \text{ für jede Phase.}$$

Hieraus folgt:

$J_2 = 987{,}5$ Amp.; im Diagramm: $\frac{J_2}{5} = 197{,}5$ Amp.

$J_3 = 117{,}2$ „ „ „ $\frac{J_3}{5} = 23{,}45$ „

J_2 und J_3 sind in den einzelnen Phasen den zugehörigen E_{21} bezw. E_{31} jeweils um 90° voraus. Die Richtung dieser E.M.Kr ist aus dem Diagramm der Abbildung 11 bereits bekannt und in die Figur 12 unmittelbar übertragen worden.

Die Addition der primären und sekundären Amperewindungen, und weil die Windungszahlen des Läufers im Diagramm gleich denjenigen des Stators gemacht sind, auch die Addition der Ströme J_1, J_2 und J_3 pro Phase führt auf der Primärseite zu dem Magnetisierungs- oder Leerlaufstrom J_0. Diese Magnetisierungsströme sind, da die Eisenverluste unberücksichtigt blieben, jeweils senkrecht zu den Umsetzungsspannungen E_2 in den einzelnen Phasen, und den letzteren direkt proportional. Infolgedessen zeigen sie auch unter sich hinsichtlich Größe und Phasenverschiebung dieselbe weitgehende Annäherung an die Symmetrie, welche schon bei den drei Gegen-E.M.K.K. E_2 (S. 44) zu bemerken war.

Diese Eigenschaft des Leerlaufstromdiagramms läßt sich folgerichtig auch auf rechnerischem Wege nachweisen, wenn die Gleichungen für die charakteristischen Größen u und γ sinngemäß angewendet werden.

Den Verhältnissen bei Leerlauf entsprechen die Werte:

$$r_{m2} = r_1 = 0{,}245 \quad \text{und} \quad k_{m2} = k_1 = 34{,}6$$

Hieraus folgt: $$u = \sqrt{\frac{3778}{3678}} = \underline{1{,}015}$$

und: $$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{6445}{3742} = -\underline{1{,}722}$$

was mit den Ergebnissen der Diagrammkonstruktion innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Zeichnung vollkommen im Einklang steht.

Die vorstehenden Auswertungen für den unsymmetrisch gespeisten Drehstrommotor sind zwar völlig ausreichend, um sein Verhalten bei allen praktisch wichtigen Betriebszuständen in jeder Hinsicht klarzustellen; allein im wesentlichen konzentriert sich das Interesse an dem vorliegenden Problem doch hauptsächlich auf die Frage,

welche Beeinflussung der Motor im Zusammenhalt mit denjenigen Betriebseigenschaften erfährt, die er bei symmetrischer Stromaufnahme zeigen würde. Einen Aufschluß über diese Frage gibt die nachstehende vergleichende Gegenüberstellung, welche so durchgeführt ist, daß ihre Ergebnisse zu allgemeinen Schlußfolgerungen über das Verhalten des Drehstrommotors bei seiner Anwendung in der elektrischen Zugförderung, geeignet sind.

Dieser Vergleich geht davon aus, daß die Beanspruchung einer Maschine nach der Erwärmung zu beurteilen ist, welche sie bei Entnahme einer bestimmten Leistung erfährt. Demzufolge wäre somit ein unsymmetrisch gespeister Drehstrommotor in seinem Verhalten einem solchen mit symmetrischer Stromaufnahme dann als gleichwertig zu erachten, wenn in beiden Fällen gleiche Leistungen mit demselben Wirkungsgrad abgegeben werden. Da nun bei den vorstehenden Untersuchungen die Eisen- und Reibungsverluste nicht in Betracht gezogen wurden, so sind in diesem Falle die gesamten Verluste auf Stromwärme zurückzuführen. Es handelt sich also bei dem zum Vergleich heranzuziehenden Betrieb mit symmetrischen Phasenströmen darum, diese Stromstärke derart zu bemessen, daß zunächst bei einer angenommenen Schlüpfung gleiche Stromwärmeverluste entstehen wie bei Unsymmetrie.

Hiefür ergeben sich die Verluste V_1 in der Statorwicklung zu:

$$V_1 = r_1 (J_I^2 + J_{II}^2 + J^2_{III}) = \frac{4}{3} J_1^2 r_1 (A_1^2 + A_2^2) \qquad \text{(s. S. 29).}$$

Und im Rotor: $$V_2 = 3 r_2 (J_2^2 + J_3^2) = \frac{4}{3} J_1^2 \cdot (s_1 r'_m A_1^2 + s_2 r''_m A_2^2)$$

Für die totalen Verluste V folgt somit:

$$\underline{V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3} J_1^2 [A_1^2 (r_1 + s_1 r'_m) + A_2^2 (r_1 + s_2 r''_m)]}$$

Für den symmetrisch gespeisten Motor, welcher bei derselben Schlüpfung einen Strom J_s aufnimmt, ist $A_1 = 1{,}5$ und $A_2 = 0$; somit lautet hier die Gleichung für die Verluste V_s:

$$\underline{V_s = 3 J_s^2 (r_1 + s_1 r'_m)}$$

Die Gleichsetzung von V und V_s liefert für den Strom J_s die Beziehung:

$$\underline{J_s = \frac{2}{3} J_1 \cdot \sqrt{A_1^2 + A_2^2 \frac{r_1 + s_2 r''_m}{r_1 + s_1 r'_m}}}$$

Das Verhältnis dieser Ströme J_s und J_1 ist somit nach dieser Gleichung eine Funktion der Schlüpfung. Innerhalb derjenigen Umdrehungszahlen jedoch, welche für diese vergleichende Untersuchung in Betracht kommen und mit Berücksichtigung der Zahlenwerte, die in dem vorstehenden Beispiel für die einzelnen Größen ermittelt wurden, kann dieses Verhältnis mit großer Genauigkeit als konstant angenommen werden.

Es ergibt sich nämlich, daß im vorliegenden Falle die Summe unter der Wurzel in der Bedingungsgleichung für J_s für Schlüpfungen von 0 bis 5% nur zwischen den Grenzen: 2,894 und 2,858 variiert. Es ist sonach ohne wesentliche Vernachlässigung gestattet, bei dem erwähnten Tourenintervall für die Bestimmung von J_s aus J_1 den Mittelwert dieses Verhältnisses zu verwenden. Demnach wird:

$$\underline{J_s = \frac{2}{3} \sqrt{2{,}876} \cdot J_1 = 1{,}13 J_1}$$

Nach der Festsetzung von J_s sind alle übrigen Größen für die Betriebskurven des äquivalenten, symmetrisch gespeisten Motors durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$W_1 = 3\,J_s^2 \cdot r_{m1} \qquad D = (3\,J_s^2\,r_m')_{KW} \cdot 4{,}33$$

$$W_m = 3\,J_s^2\,(1-s_1)\,r_m' \qquad \eta = \frac{W_m}{W_1} = (1-s_1)\,\frac{r_m'}{r_{m1}}$$

Die Klemmenspannung pro Phase: $\dot{\Delta}_\varphi = \dot{J}_s\,(r_{m1} - j\,k_{m1})$

$$\cos\varphi = \frac{J_s\,r_{m1}}{\Delta_\varphi}; \qquad V_s = (1-\eta)\,W_1$$

In der nachstehenden Zahlentafel sind diese Werte für die gleichen Schlüpfungen s_1 wie bei Unsymmetrie (s. S. 43) tabellarisch zusammengestellt.

Nr.	s_1	J_s	$W_{1\,KW}$	$W_{m\,KW}$	D_{mkg}	η %	$\Delta\varphi$	$\cos\varphi$	$V_s = (1-\eta)\,W_1$
1	0	49,6	1,81	0	0	0	1718	0,007	—
2	0,005	58,8	166,5	163	710	98	1690	0,559	3,33
3	0,01	81,1	315	306,5	1340	97,4	1660	0,781	8,22
4	0,015	107,0	453	437	1920	96,4	1635	0,864	16,3
5	0,02	133,5	580	555	2450	95,7	1610	0,901	25,0
6	0,025	159,2	692	656	2910	94,9	1582	0,915	35,1
7	0,03	185,0	800	752	3360	94,1	1560	0,925	47,1
8	0,035	208	888	822	3700	92,5	1540	0,923	66,5
9	0,04	231	970	890	4030	91,8	1510	0,924	79,5
10	0,05	272,2	1100	990	4520	90,0	1460	0,922	110

Die Werte dieser Tabelle sind gleichzeitig mit denjenigen der Zusammenstellung auf S. 43 für den unsymmetrisch betriebenen Motor in den Abbildungen 13 und 14 zur Darstellung gebracht und zwar, wie üblich, abhängig vom Drehmoment D. Hiebei ist in der Weise verfahren, daß die bei gestörter Symmetrie in den einzelnen Phasen auftretenden Grenzwerte (für eine bestimmte Schlüpfung) gestrichelt eingezeichnet und der Zwischenraum innerhalb dieser Grenzkurven durch Schraffierung überdeckt wurde. Die stark ausgezeichneten Schaulinien in diesen Figuren stellen die entsprechenden Betriebskurven bei symmetrischer Stromaufnahme dar. Mit Ausnahme der Phasenspannung Δ_φ kommen diese letzteren durchwegs sehr nahe den Mittelwerten aus den bei unsymmetrischen Phasenströmen gültigen Größen gleich.

In Bezug auf die Grenzen der Phasenspannungen Δ_1, Δ_2 und Δ_3 (Abbildung 13) ist hervorzuheben, daß diese Werte, trotz der großen Unterschiede zwischen den einzelnen Spannungsverlusten ε in der Stromzuführung, untereinander relativ rehr geringe Differenzen aufweisen, die in der graphischen Darstellung nur durch den stark vergrößerten Spannungsmaßtab die Ordinatengröße des Spielraumes bei den übrigen Betriebskurven erreichen. Daraus ist zu folgern, daß der Drehstrommotor auf Grund seiner Wirkungsweise selbstätig daraufhin arbeitet, eventuelle Unterschiede in den Klemmenspannungen wieder auszugleichen. Dieser Ausgleich wird bewirkt

durch entsprechende Abstufung der Stromstärken in den einzelnen Phasen und durch die Verschiebung des Potentials des Sternpunkts der Statorwicklung.

Das Resultat der vergleichenden Gegenüberstellung des symmetrisch und des unsymmetrisch gespeisten Motors ist in der Abbildung 15 in augenfälliger Weise zum Ausdruck gebracht. Diese Darstellung enthält als Ordinaten die gesamten Stromwärmeverluste V bezw. V_s (vergl. die letzten Spalten in den Tabellen auf S. 43 und 48) abhängig von der mechanischen Leistung W_m sowohl bei Symmetrie (volle Kreise) als auch bei Unsymmetrie der Phasenströme (Ringe). Der Umstand, daß sich die Funktion aus diesen Größen in beiden Fällen so sehr gleicht, daß sie mit großer Annäherung durch eine einzige mittlere Kurve dargestellt werden kann, beweist nach den obigen Erwägungen die Gleichwertigkeit der Betriebsweise des Drehstrommotors bei der im vorliegenden Spezialfall ermittelten Unsymmetrie, mit derjenigen bei symmetrischer Stromaufnahme, welche auf Grund der größtmöglichen Ausnützungsfähigkeit der Maschine als die günstigste erkannt wurde.

Das Schlußergebnis dieser Untersuchung ist zwar unter der Annahme bestimmter Zahlenwerte für die den Ausgleichvorgang hauptsächlich bestimmenden Größen einer Streckenausrüstung abgeleitet worden. Allein diese Annahmen entsprechen, wie schon zu Beginn des zweiten Teils dieses Abschnitts erwähnt wurde, dem ungünstigsten Fall der Energieübertragung an die Maschine, der nur vorübergehend — in dem vorliegenden Beispiel je einmal nach 10 km Fahrt — eintritt. Es ist ferner nicht anzunehmen, daß sich bei ausgeführten Drehstrombahnen noch erheblich ungünstigere Verhältnisse vorfinden sollten, wie sie den hier durchgeführten Berechnungen zu Grunde liegen. Denn Fahrdrahtquerschnitt und Schienengewicht, sowie die Abmessungen des Streckenprofils, wodurch die Linienkoëffizienten vorwiegend bestimmt werden, sind keineswegs in so weiten Grenzen veränderlich, daß die Wahrscheinlichkeit einer wesentlich stärkeren Unsymmetrie als die im vorstehenden behandelte gegeben ist.

Diese Erwägungen berechtigen daher zu der Schlußfolgerung, daß die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung eines speziellen Falles in ihrem vollen Umfange auf Drehstrombahnen überhaupt anzuwenden sind, und daß somit von einer ungünstigen Beeinflussung der Arbeitsweise der Motoren bei diesem System der elektrischen Traktion infolge der ihm eigentümlichen Stromzuführung nicht gesprochen werden kann.

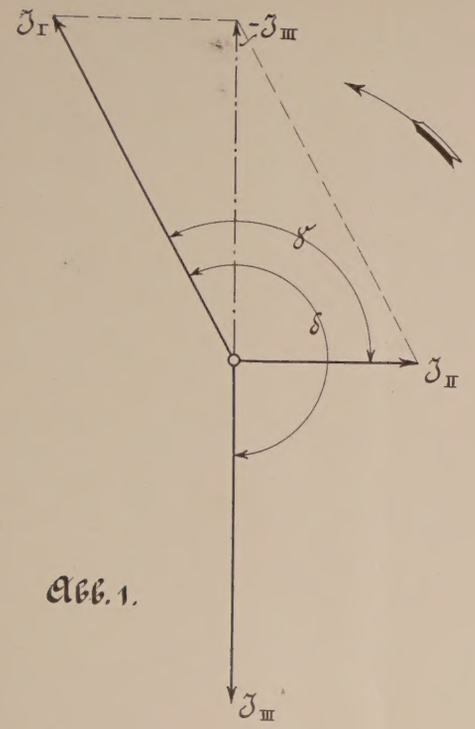

Abb. 1.

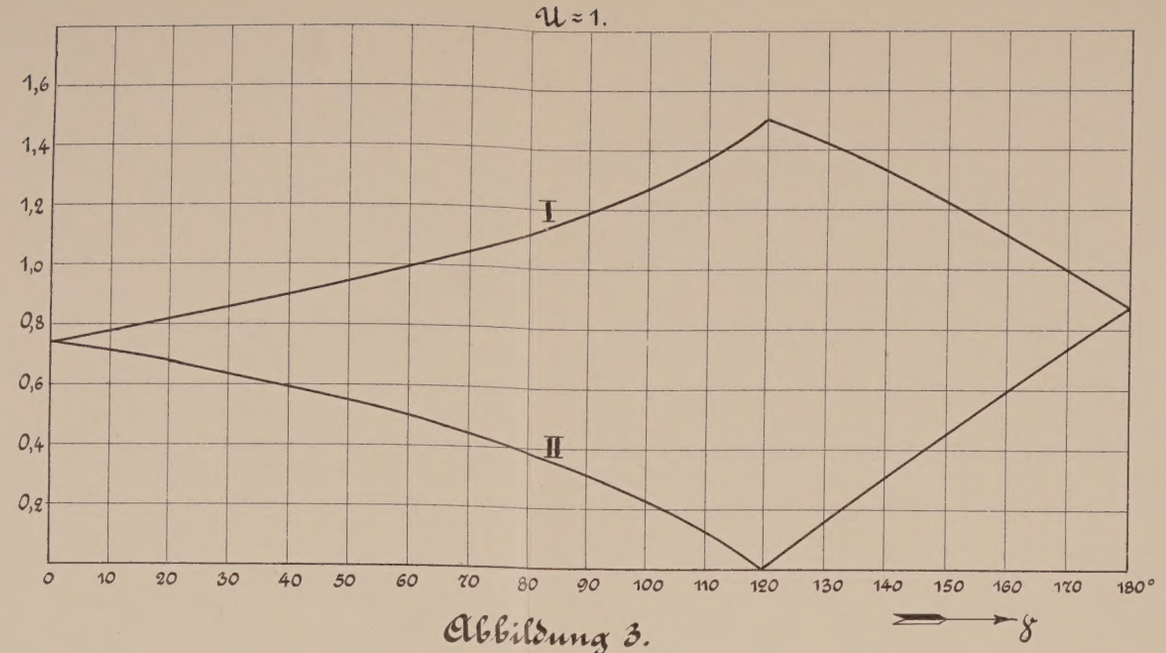

Abbildung 3.

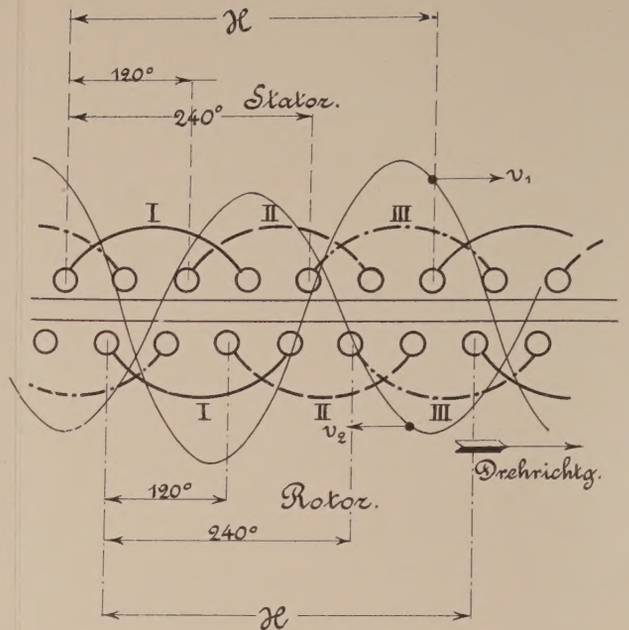

Abb. 5.

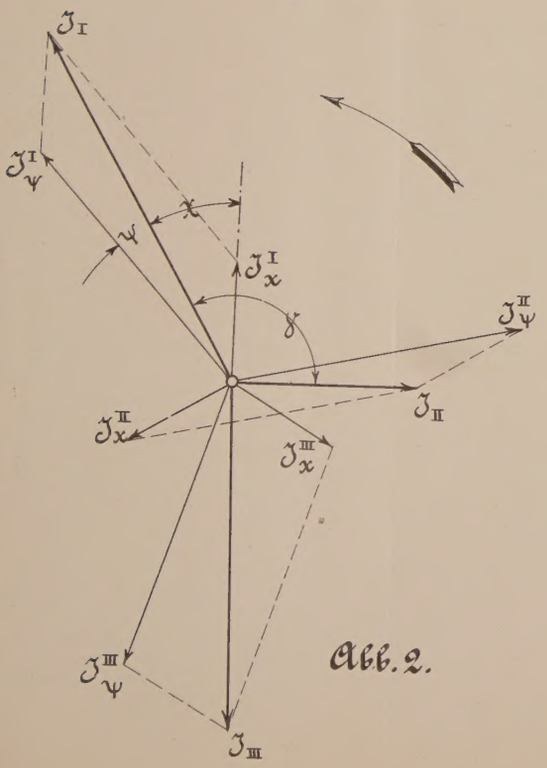

Abb. 2.

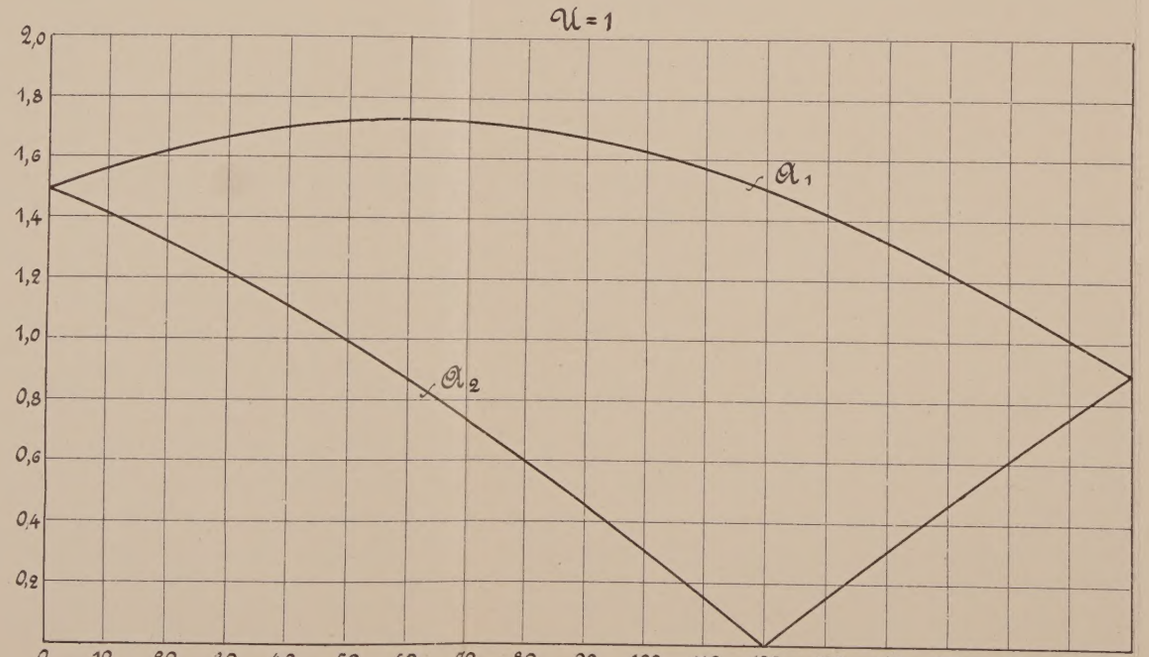

Abbildung 4.

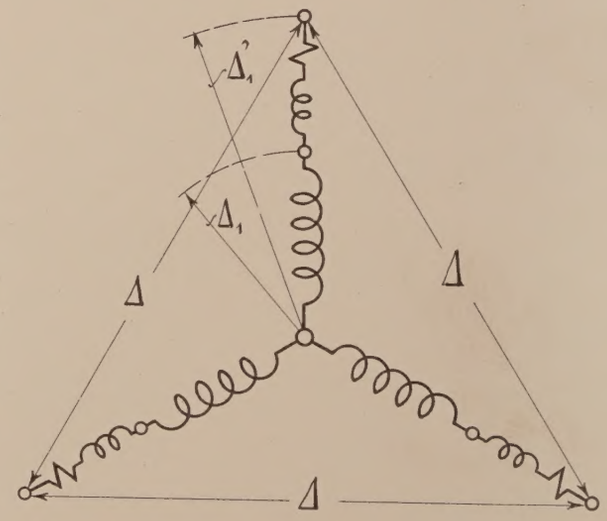

Abb. 6.